2002
Alejandro R. Garciadiego
EL TEOREMA DE PITÁGORAS COMO PARADIGMA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA PLANA: SIMPLIFICAR NO SIEMPRE SIMPLIFICA
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, noviembre, año/vol. 5, número 003
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 251-270

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 5, Núm.3, noviembre, 2002, pp. 251-270.

El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica

Alejandro R. Garciadiego*

RESUMEN

El objetivo de este ensayo es poner de manifiesto, al considerar como un caso la demostración del teorema de Pitágoras, cómo el estudio de la historia y filosofía de las matemáticas puede arrojar luz para percatarse sobre la existencia de conflictos cognitivos en la práctica docente. Cuando por fines didácticos se simplifica un concepto matemático, surgen confusiones metodológicas que se convierten en barreras infranqueables para el estudiante. Tanto maestros como alumnos no sólo desconocen los orígenes y las causas de un conflicto de esta naturaleza en el aprendizaje de las matemáticas, sino que en ocasiones tal confusión es inadvertida.

PALABRAS CLAVE: Euclides, Geometría Plana, Teorema de Pitágoras, Enseñanza, Historia

Pitagoras' Theorem as a paradigm for plane geometry teaching: to simplify not always simplify

ABSTRACT

The goal of this paper is to show how the study of history and philosophy of mathematics can shed light on becoming conscious of the existence of cognitive conflicts in the pedagogical activity. The proof of the Pythagorean theorem is taken as a particular illustration of that situation. When a mathematical concept is simplified for the sake of didactical aims, some methodological confusions emerge and these may become unsurmountable barriers for the student. Teachers, as well as students, are not just unaware of the origins and causes of a conflict of such a nature in the learning of mathematics but, in some occasions, they do not realize the conflict itself.

KEY WORDS: Euclid, Plane Geometry, Pythagorean proposition, Pedagogy, History.

Le théorème de Pythagore comme paradigme del'enseignement de la géométrie plane: simplifier ne simplifie pas toujours

RÉSUMÉ

Nous allons considérer dans ce travail la démonstration du théorème de Pythagore pour montrer comment l'étude de l'histoire et de la philosophie des mathématiques peuvent nous aider à trouver quelques conflits cognitifs dans la pratique éducative. La simplification d'un concept mathématique à de fins didactiques pose des problèmes qui vont devenir des difficultés presque insurmontables pour l'étudiant. Les origines et les causes des conflits mentionnés

Fecha de recepción: Marzo de 2001.
**Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.*

ci - dessus passent inaperçues tant pour l'élève comme pour le professeur et parfois même le conflit n'est pas aperçu.

MOTS CLÉS: Euclide, Géometrie Plaine, Théorème de Pitagore, Apprentissage, Histoire.

Teorema de Pitágoras como paradigma do ensino do geometria plana: simplificar non sempre simplifica

RESUMO

O objetivo deste ensaio é mostrar, a partir do caso da demonstração do teorema de Pitágoras, como o estudo da história e filosofia da matemática pode propiciar luzes para se advertir sobre existència de conflitos cognitivos na prática docente. Quando, para fins didáticos, se simplifica um conceito matemático, surgem confusões metodológicas que se convertem em barreiras intransponíveis aos estudantes. Tanto os professores, como os alunos, não somente desconhecem as orígens e as causas de um conflito desta natureza na aprendizagem da matemática, como há ocasiões em que a confusão estabelecida é inadvertida.

PALAVRAS CHAVE: Euclides, Geometria Plana, Teorema de Pitágoras, Ensino, História.

I

Uno de los oficios más antiguos que reportan diversos objetos históricos es el del maestro. Fuentes originales –vasijas, papiros y códices, entre otros– contienen alusiones a sacerdotes, hechiceros, brujos o maestros que debían transmitir su conocimiento a la generación subsiguiente (Closs, 1993, p. 144). Algunos historiadores de las matemáticas (Aaboe, 1964, p. 27; Neugebauer, 1957, p. 30 y Van der Waerden, 1954, p. 67) han sugerido que el objetivo de un gran número de las tablas cuneiformes, así como de algunos de los manuscritos griegos que sobreviven, era de carácter pedagógico.

Una de las obras matemáticas que mayor influencia ha ejercido en la historia de la enseñanza de las matemáticas es la escrita por Euclides, los *Elementos*, en el año 300 antes de Cristo, aproximadamente. Sin embargo,

Ilustración. Detalle de una vasija clásica maya en que se muestra una escena de clase (dibujo de Closs, basado en Robicsek y Hales, 1981, vasija 56) poco o casi nada se sabe de Euclides (Heath, 1925, I, pp. 1-6; Euclides, 1991, pp. 9-14) e incluso por muchos años se confundió su lugar de nacimiento, por lo que se le asignaba una identidad ajena. El origen de esta desorientación se le atribuye a la obra de Valerio Máximo (Heath, 1921, I, pp. 355-356), quien vivió en el siglo I de nuestra era, unos trescientos años después de que apareciera Euclides en escena. Valerio Máximo es autor de *Nueve libros de acciones y dichos memorables*, dirigido a escuelas de retórica, ya que ejemplificaba algunas virtudes y vicios humanos. Por lo mismo, si nada sabemos de la vida de Euclides, tampoco sorprende que, aun después de más de dos mil años, haya dudas en torno al objetivo de su obra.

Dos anécdotas sobre la personalidad de Euclides se han perpetuado en la historia de las matemáticas; ambas están íntimamente relacionadas con los procesos de enseñanza. En la primera, se dice que un estudiante adinerado cuestionó la utilidad práctica de lo que se le enseñaba. La leyenda relata que Euclides le solicitó a un esclavo que le otorgara a este estudiante unas monedas para que satisficiera su necesidad material (Gow, 1884; pp. 195-196; Van der Waerden, 1954, p. 196 y Thomas, 1939, p.437, acreditan esta versión a Estobeo). La segunda relata que el rey Ptolomeo I, al ser enseñado sobre algunos principios básicos de geometría, cuestionó si no existiría un camino *real* para las matemáticas, sugiriendo una vía especial para él, breve y sencilla. La respuesta de Euclides fue negativa (Cajori, 1894, p. 35).[1]

En los *Elementos*, Euclides presentó las demostraciones de 465 proposiciones diferentes. Para hacer su proyecto aún más sólido, se propuso utilizar sólo herramientas que estuvieran contenidas en su tratado, es decir, conceptos explícitamente formulados para desarrollar su obra. Algunos comprendían definiciones, nociones comunes (principios lógicos evidentes en cualquier disciplina, no únicamente en matemáticas) y postulados (aseveraciones que se aceptan como evidentes para tener un punto de partida). Así, cada nueva proposición se basaba en proposiciones previamente justificadas. De ninguna manera se permitía introducir, en el proceso de alguna demostración en particular, elementos que fueran ajenos a esta concatenación de argumentos lógicos.

Euclides no es el autor de la gran mayoría de las demostraciones. Es más; se sabe que algunos libros ya habían sido ordenados casi en la forma como él los presentó. Por ejemplo, el libro I se le atribuye, casi en esa misma sucesión, a Hipócrates de Quios (Bunt, Jones y Bedient, 1976, p. 141; Kline 1992, p. 69) o, al menos, se discute que este último ya había presentado una versión muy semejante.[2]

La gran mayoría de los comentaristas de Euclides (Archibald, 1934, p. 16; Ball, 1908, pp. 51-56; Burton, 1988, pp. 155-156; Eves, 1976, p. 15 y Proclo 1970, p. 57) alaban su labor *editorial*, ya que dicha empresa requirió de un gran esfuerzo mental, penetrante y analítico.[3] Otros historiadores han señalado supuestos errores graves cometidos por

[1] Algunos autores, como Eves (1976, p. 115), atribuyen esta anécdota a Alejandro Magno, quien fue entrenado en matemáticas por Menaeco, aunque otros (Boyer, 1986, p. 141) no especifican el nombre del maestro. Existen otras versiones que atribuyen la misma anécdota a otros reyes y a otros maestros (Heath, 1925, I, nota 4).

[2] Se afirma que los platónicos León y Theudius, predecesores de Euclides, ya habían propuesto arreglar los teoremas de tal forma que los posteriores se apoyaran en los anteriores (Proclo, 1970, pp. 54-56 y Gow, 1884, p. 197).

[3] Proclo (1970, p. 57), por ejemplo, afirma que debemos admirar a Euclides *por su precisión admirable y perspicacia científica y por el orden y selección de los teoremas.*

Euclides, al violar las propias leyes que él mismo había impuesto.[4] Durante siglos, y ante la controversia, al dudar los matemáticos acerca de algunas de las pruebas ofrecidas por Euclides, han intentado elaborar demostraciones alternativas, como Toussaint (1993), por mencionar solamente a uno de los más recientes. Otros, como Kline (1992, p. 114; por mencionar únicamente a uno de los más accesibles) comentaron sobre la aparente duplicación de las proposiciones que es ostensible entre los libros I y VI y V y VII, respectivamente (Knorr, 1975, pp. 303-304). Justo es decir, sin embargo, que la gran mayoría de los errores que se le habían imputado a Euclides son improcedentes. Los yerros más bien habían sido cometidos por aquellos matemáticos, filósofos e historiadores que juzgaban a Euclides con criterios modernistas, anacrónicos a su época, y que desconocían el contexto de la matemática griega. La mayor parte de tales juicios se produjo al concebir a las matemáticas griegas como indistinguibles de las actuales: pensar que las matemáticas griegas no eran más que uno de los primeros eslabones de una matemática lineal, continua y acumulativa. Sin embargo, se sabe hoy que existen conceptos creados por los matemáticos griegos que son ontológicamente diferentes a los contemporáneos (Berggren, 1984; Grattan-Guinness, 1996; Jones 1987a y 1987b, y Unguru, 1975 y 1979).

II

Los *Elementos* están compuestos por trece libros; algunos tratan sobre geometría, otros sobre aritmética. El primero de ellos contiene lo que ahora podríamos llamar los fundamentos de la geometría plana. Contrariamente al tratado en general,[5] el objetivo principal del primer libro es muy claro: la presentación y demostración del teorema de Pitágoras. Este teorema tiene la propiedad de entrelazar y unificar gran número de proposiciones de la matemática en general (geometría, trigonometría, álgebra, cálculo, entre otras) y no únicamente de la geometría plana.[6] Es más, algunos historiadores, como Dauben (1991), han medido el grado de sofisticación matemática de algunas culturas primitivas no tradicionales en función de que estas comunidades poseían conocimiento de dicha proposición.

La proposición I. 47, es decir, la 47 del primer libro de Euclides, que se conoce como teorema de Pitágoras, afirma que *en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto*. En otras palabras, en todo triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (véase Figura 1). Si *A* es

---

[4] En relación con la demostración de la primera proposición del primer libro (construir un triángulo equilátero), Heath (1925, I, p. 242) hace notar que Euclides no tiene derecho a asumir la existencia de un cierto punto al intersecarse dos círculos sin introducir un nuevo postulado. Por su parte, Kline (1992, pp. 125-127) sostiene que Euclides no debió utilizar el principio de superposición de figuras, ya que implica el principio de *movimiento*, el cual no tiene base lógica dentro de los *Elementos*.

[5] Durante mucho tiempo se ha mantenido (Cajori, 1894, p. 30; Gow, 1884, p. 125 y Knorr, 1975, p. 288) la hipótesis de que el objetivo del trabajo en general era presentar la construcción de los cinco sólidos regulares geométricos, la cual, a su vez, era sumamente congruente con la supuesta influencia platónica en Euclides (Jones, 1987b).

[6] En la mayoría de las distintas ramas de las matemáticas hay proposiciones que, por su naturaleza y profundidad, juegan el papel de elementos unificadores y sintetizadores de una teoría. Por ejemplo, el teorema del buen-orden permite desarrollar una aritmética de los números cardinales y ordinales transfinitos dentro de la teoría de conjuntos (Fraenkel, 1976, pp. 116-122). Otro ejemplo es el teorema fundamental del cálculo, que admite tratar a los procesos de derivación e integración de una función como operaciones inversas (Boyer 1949, p. 10).

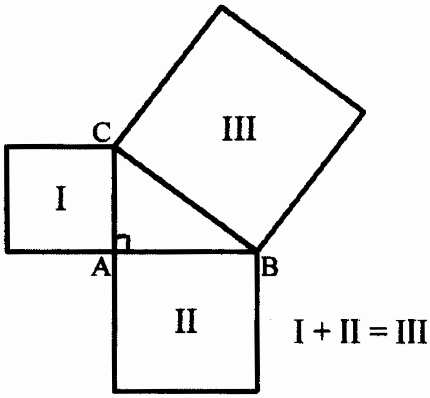

Figura 1 Teorema de Pitágoras.

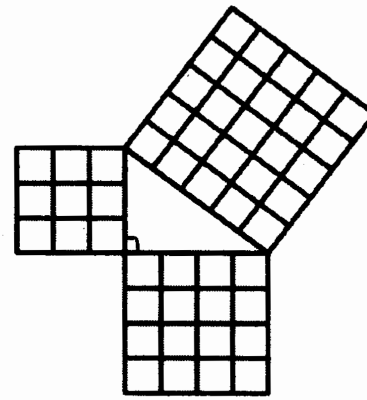

Figura 2 Demostración sin palabras.

el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y B y C son las áreas correspondientes a los cuadrados construidos sobre los catetos, entonces

$$A = B + C$$

Existen *pruebas* tan sencillas de esta proposición que se pueden presentar sin el uso de palabras. Una de ellas se ilustra en la Figura 2, en la que únicamente es necesario contar el número de cuadros que aparece en cada uno de los cuadrados. Tal demostración sin palabras es sumamente informal y sencilla. Sin embargo, hay dos objeciones que pueden surgir inmediatamente en la mente de los estudiantes. Esta prueba no es satisfactoria, ya que la propiedad enunciada no se cumple para todos los ternos de números enteros consecutivos. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras no es válido para un triángulo con lados de longitud igual a 1, 2 y 3; ya que, $1^2 + 2^2 \neq 3^2$. Tampoco es válido para un triángulo cuyos lados midan 5, 6 y 7 respectivamente, ya que $5^2 + 6^2 \neq 7^2$. Una segunda objeción podría surgir cuando algún estudiante preguntara por aquellos triángulos cuyas longitudes no se puedan expresar con números enteros. ¿Qué pasa, por ejemplo, con un triángulo donde uno de sus lados podría medir 3.5 unidades?

Bajo tales inquietudes, el maestro podría discurrir la siguiente demostración. Sea el triángulo $(\Delta)ABC$ (véase Figura 3), donde el ángulo $(\angle)BAC$ es igual a un ángulo recto y $AB = AC$. Constrúyase sobre AB el cuadrado $(\square)ABDE$ y sobre AC el cuadrado $(\square)ACGF$. Trácense los segmentos de recta DA, AG, EB, FC y EF.

Por hipótesis,

$$AB = AC$$

y, por construcción,

$$AB = AE$$

Luego, por el postulado 4, que afirma que *todos los ángulos rectos son iguales entre sí* (Euclides 1991, p.197),

$$\angle BAC = \angle BAE$$

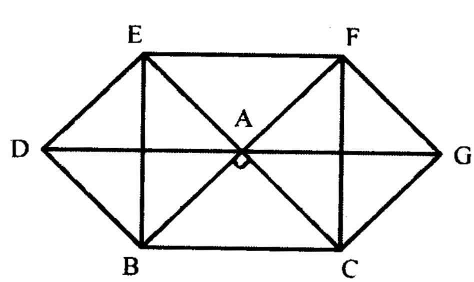

Figura 3 Demostración geométrica.

Por la proposición I.4, que sostiene *si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos entre las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber, los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente* (Euclides 1991, pp. 205-206), se tendrá que

$$\Delta BAC = \Delta BAE.$$

Ahora, por construcción

$$BD = DE \text{ y } BD = BA = AC,$$

y por la definición 22 (que caracteriza a los cuadriláteros) y el postulado 4, tenemos que

$$\angle BAC = \angle BDE$$

Así,

$$\Delta BAC = \Delta BDE,$$

y por la noción común 1, que afirma que *cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí* (Euclides 1991, p. 199), resulta que

$$\Delta BAC = \Delta BAE = \Delta BDE$$

De manera análoga, se demuestra que

$$\Delta BAC = \Delta CAF = \Delta CGF,$$

pero también se cumple que

$$\Delta BAC = \Delta EAF,$$

ya que

$$AB = AC = EA = AF,$$

y, por la proposición I.15, que afirma que *si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí* (Euclides 1991, p. 219), se tiene que

$$\angle BAC = \angle EAF$$

De aquí que

$$\Delta BAC = \Delta BAE = \Delta BDE = \Delta CAF = \Delta CGF = \Delta EAF$$

Así que,

$$\text{área } (\square\, ABDE) = \text{área } (\Delta BDE) + \text{área } (\Delta EAB),$$

y como

$$\Delta BDE + \Delta EAB = \Delta EAB + \Delta BAC,$$

entonces

$$\text{área } (\square\, ABDE) = \text{área } (\Delta EAB) + \text{área } (\Delta BAC)$$

De manera análoga,

$$\text{área } (\square\, ACGF) = \text{área } (\Delta CAF) + \text{área } (\Delta FAE),$$

y, como,

$$\text{área } (\square\, BEFC) = \text{área } (\Delta EAB) + \text{área } (\Delta BAC) + \text{área } (\Delta CAF) + \text{área } (\Delta FAE),$$

entonces, por la noción común 1, tenemos que

$$\text{área } (\square\, BEFC) = \text{área } (\square\, ABDE) + \text{área } (\square\, ACGF).$$

Ahora bien, algún alumno podría señalar que ésta aún no es una demostración satisfactoria del teorema de Pitágoras, ya que se ha supuesto que AB es igual a AC. Es decir, se ha propuesto como hipótesis, desde el inicio, que dos de los lados del triángulo son iguales, por lo que se trata de una demostración que sólo es válida para el caso *particular* en que el triángulo rectángulo fuera isósceles. Entonces, se tendría que proceder a demostrar la misma proposición para los triángulos equiláteros y los escalenos. Uno de los puntos esenciales que debe comprender todo estudiante es que una demostración matemática rigurosa exige que cualquier proposición sea probada en toda su generalidad posible. En este caso, se pretende aseverar la proposición I.47 para *todo* triángulo rectángulo, independientemente de su forma, posición o tamaño. Si se muestra una figura es únicamente para ilustrar el caso, pero la demostración no debe depender de aquélla.

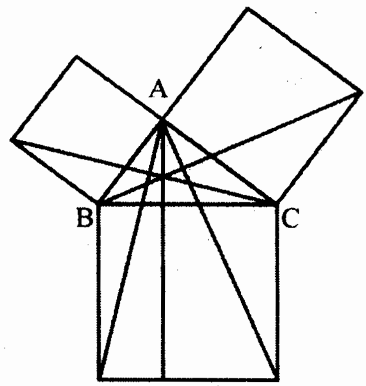

Figura 4 Imagen de la proposición I.47.

Se dice que es muy factible que en la época de Euclides, dada la relevancia e implicaciones de la proposición, se conociera casi una docena de pruebas diferentes con distintos grados de dificultad. A primera vista, a partir de la imagen euclideana del teorema de Pitágoras (véase Figura 4), éste parece ser bastante complejo. Es más, uno estaría tentado a pensar que en el pasado ha observado imágenes más sencillas.

Pero volvamos al salón de clase. En la actualidad, si se deseara presentar a los estudiantes un posible objetivo general para un curso de geometría elemental plana, se podría aseverar sin duda alguna que, debido a las implicaciones de su uso en la misma geometría y en otras ramas de las matemáticas, dicho objetivo es entender el teorema de Pitágoras. Pero, para involucrar a nuestros estudiantes y obtener su atención, una vez expuesta la figura y explicado el principio, pregúnteseles cuáles podrían ser algunas de las metas intermedias antes de poder demostrar la proposición con su mayor grado de generalidad. Lo primero sería aprender a construir los cuadrados que se erigen sobre los tres lados del triángulo. Para eso se requiere saber construir una recta perpendicular, y una recta paralela a otra ya dada. También se necesita poder comparar entre sí las áreas de los cuadrados que se construyan, y así por el estilo.

III

Empero, se carece de un prefacio, prólogo o introducción que discuta cuáles son los principios metodológicos del tratado de Euclides. Así, cuando uno abre el texto por primera vez, se encuentra abruptamente con una lista de veintitrés definiciones.[7] A continuación, aparece una lista de cinco postulados (como el número 1: Dados dos puntos cualesquiera, éstos se pueden unir por medio de una recta), seguida de cinco nociones comunes (la 5: El todo es mayor que cualquiera de sus partes). Con estas hipótesis se propuso Euclides *deducir* el contenido de su tratado. Como es razonable suponer y, dadas las limitaciones que él mismo se impuso, el tratado de Euclides

[7] Algunas de ellas, debido al desconocimiento del contexto de la matemática griega, se podrían considerar innecesarias, como la tercera definición afirma: *los extremos de una línea son puntos* (Euclides, 1991, p. 189).

empieza por lo más elemental y va aumentándose el grado de dificultad. Así, las primeras proposiciones son:

I.1. *Construir un triángulo equilátero* (Euclides 1991, p. 201).
I.2. *Sobre un punto, construir una recta igual a otra dada* (*ibidem*, p. 203).
I.3. *De dos rectas desiguales, restar de la mayor una igual a la menor*" (*ibidem*, p. 205).
I.4. *Primera caracterización de igualdad de triángulos, que ya hemos usado con anterioridad* (véase página 256).

A continuación, se demostrará la proposición I.5 como un ejemplo del método euclidiano: *En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí* (Euclides 1991, p. 208).

Demostración: Sea ABC el triángulo isósceles en el que los lados AB y AC son iguales (véase Figura 5). Por el postulado 2, prolónguese la recta AB hasta F y la recta AC hasta G; sobre la recta AF, tómese al azar un punto D. Ahora, por la proposición I.3, sobre la recta AG córtese una recta (AE) igual a la recta AD.

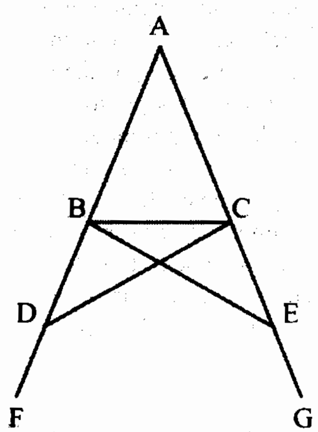

Figura 5 Proposición I.5.

Únanse B con E y C con D (por el postulado 1). Ahora, como la recta AD es igual a la recta AE, la recta AB es igual a la recta AC (por hipótesis) y el ángulo comprendido entre ellas es el mismo ($\angle BAC$). Entonces, por la proposición I.4,

$$\Delta ADC = \Delta AEB$$

Pero si estos triángulos son iguales, entonces, por la misma proposición I.4, se tiene que los ángulos correspondientes también son iguales.

Ahora, si a iguales (AD y AE) se restan iguales (AB y AC), por la noción común 3, los resultados son iguales ($BD = CE$). Por el uso de la proposición I.4, se sigue que $BE = CD$ y el ángulo comprendido entre las rectas respectivamente iguales también es igual, es decir,

$$\angle BDC = \angle BEC$$

Si se aplica una vez más la proposición I.4, se obtiene que

$$\Delta CBD = \Delta BCE$$

Esto implica, a su vez, que

$$\angle ACD = \angle ABE$$

y

$$\angle EBC = \angle DCB$$

Ahora, nuevamente por la noción común 3, si a iguales se restan iguales, entonces

$$\angle ABC = \angle ACB,$$

que es lo que se pretendía mostrar.

Es necesario hacer hincapié en la metodología seguida por Euclides. Se pretende eslabonar una cadena de razonamientos en la que cada nueva proposición se deduzca del conocimiento previamente establecido. A pesar de posibles errores menores, la obra de Euclides eclipsó a las ya conocidas en su época, pues fue capaz de encontrar el conjunto de principios lógicos que permitían subsiguientemente deducir el conocimiento geométrico.

Algunas otras proposiciones directa o indirectamente implicadas con la proposición pitagórica son:

I.8. *Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces los triángulos serán iguales y los tres ángulos respectivos serán iguales* (segundo criterio de igualdad de triángulos) (Euclides 1991, p. 212).
I.9. *Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado* (*ibidem,* p. 213).
I.11. *Trazar una perpendicular a otra recta en un punto sobre ella* (*ibidem,* p. 214).
I.23. *Construir un ángulo rectilíneo igual a otro ya dado, sobre una recta dada y en uno de su puntos* (*ibidem,* p. 215).
I.32. *En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos* (véase Figura 6) (*ibidem,* p. 241).

Veamos la demostración de esta última proposición. Sea cualquier triángulo dado *ABC*. Prolónguese uno de sus lados (*BC*) hasta *D*. Por la proposición I.31,[8] trácese por el punto *C* la recta *CE* que sea paralela a *AB*. Ahora, por la proposición I.29,[9] se tiene que los ángulos alternos son iguales entre sí. Por tanto,

$$\angle BAC = \angle ACE$$

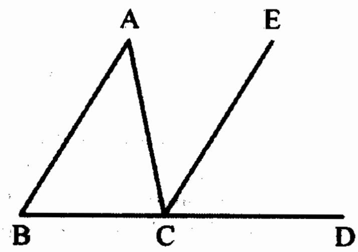

Figura 6 Proposición I.32.

Como las rectas *AB* y *CE* son paralelas y por construcción la recta *BC* incide sobre ellas, por la proposición I.29 nuevamente se sigue que

$$\angle CBA = \angle DCE.$$

Pero

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle DCE$$

De aquí, por la noción común 1, se sigue que

$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE$$

Ahora, por la noción común 2 (si a iguales se suman iguales, los resultados son iguales),

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB$$

Luego, por la proposición I.13 (si una recta levantada sobre otra forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien ángulos iguales a dos rectos) (Euclides 1991, p. 217), se obtiene que

$$\angle ACE + \angle DCE + \angle ACB = 2 \text{ rectos}$$

[8] Proposición I.31: Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada (Euclides 1991, 241).

[9] Proposición I.29: La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos (Euclides 1991, 238).

y, por la noción común 1,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2 \text{ rectos},$$

que es lo que se pretendía demostrar.

En este punto sería conveniente recordarles a los estudiantes cuál es el objetivo central de este desarrollo y cuestionarlos tanto sobre algunos conceptos que ya han aprendido como sobre aquellos que aún falta introducir. Por ejemplo, aún no se sabe cómo construir cuadrados. Así, algunas otras proposiciones son las siguientes:

I.37. *Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí* (Euclides 1991, p. 247).

I.41. *Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo* (*ibidem*, p. 252).

I.46. *Trazar un cuadrado a partir de una recta dada* (*ibidem*. p. 259).

Finalmente, se llega al objetivo central. Ahora se demostrará la proposición que le da coherencia lógica al grueso de la geometría plana y que la relaciona con muchas otras ramas de las matemáticas. Dada nuestra innegable vocación y dedicación pedagógica, es factible entender a aquellos maestros que, preocupados por la comprensión de sus estudiantes, buscan la manera de simplificar esta prueba, sobre todo si se toma en cuenta que, siendo el principio más importante, no se desea que el estudiante se quede con alguna duda o se pierda en la demostración.

Así que el maestro, profesional y honestamente angustiado, presenta a sus estudiantes una demostración de la proposición pitagórica, alternativa a la dada por Euclides. Historiadores de las matemáticas (Heath, 1921, I, pp. 144-149 y 1925 I, pp. 350-356) han discutido cuáles pudieron haber sido algunas de las alternativas que Euclides pudiera haber usado para demostrar el teorema de Pitágoras. En la actualidad, nuestro espectro para escoger es aún mayor. Existe un texto de Loomis (1968) en el que se han incluido más de doscientas demostraciones diferentes de la proposición I.47.

Por la simplicidad del argumento, y por la sencillez de la demostración, el pedagogo pudo haber escogido la siguiente: constrúyase un cuadrado que tenga por lado $a + b$, donde a y b corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo.

Entonces, el maestro argumenta: el área del cuadrado (véase Figura 7) es igual a

$$(a + b)^2$$

El área del cuadrado se puede calcular también como la suma de las áreas de los cuatro triángulos que se forman al unir los puntos P, Q, R y S marcados en los lados del cuadrado exterior, como se muestra en la Figura 7, más el área del cuadrado interior. Así, con esta opción se tiene que el área total es igual a

$$4(a \cdot b)/2 + c^2$$

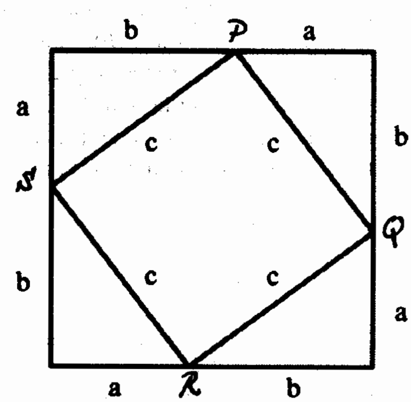

Figura 7 Demostración algebraica.

Por la noción común 1, se obtiene que

$$(a + b)^2 = 4(a \cdot b)/2 + c^2.$$

Al desarrollar el binomio y simplificar,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

y, al simplificar una vez más, se llega a

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

IV

Cualquiera podría sentirse orgulloso de presentar esta demostración alternativa. Matemática y visualmente es mucho más sencilla que la de Euclides. Pero, en el afán por simplificar una demostración, que se suponía compleja, se han traicionado algunos principios metodológicos que se propusieron a los estudiantes al inicio. ¿Dónde quedó ese método constructivo y deductivo? ¿Dónde quedó ese esfuerzo por apoyarse en el conocimiento anterior y únicamente utilizar las proposiciones ya demostradas? Inconscientemente, ¿qué es lo más peligroso, el estudiante se siente confundido y traicionado? ¿De dónde surgió la nueva demostración? No debería sorprender al maestro si un estudiante de desempeño promedio preguntara:

> Profesor, ¿para qué tuvimos que aprender todo lo anterior? ¿De qué nos sirve conocer cómo trazar perpendiculares o construir cuadrados? De acuerdo con la demostración que usted nos ha presentado, no había razón alguna para estudiar las proposiciones que tratan sobre ángulos alternos internos o sobre triángulos y paralelogramos construidos sobre las mismas paralelas o las diversas condiciones para la igualdad de triángulos. Ninguna de estas proposiciones interviene en la demostración de la proposición que se nos había indicado era el centro de atención de nuestro compendio de geometría plana. Algunas de estas proposiciones no fueron sencillas. ¿Por qué no se nos advirtió desde un principio que con nuestro conocimiento previo de álgebra era suficiente?

En el afán por simplificar una demostración se han traicionado y sacrificado dos principios metodológicos fundamentales:

1) El modo de proceder autocontenido. Es decir, en los procesos de demostración o construcción únicamente se podía recurrir a lo que ya con anterioridad se había construido o demostrado.

2) Se pasó por alto que se construye de lo sencillo a lo complejo. Euclides parte de cómo construir un triángulo equilátero, continúa con la construcción de rectas específicas, y así en adelante.

Como veremos a continuación, la demostración de la proposición I.47 aparentemente es larga y posiblemente compleja, pero no hay un solo paso que no esté previamente justificado. Por el contrario, la demostración alternativa que se presentó parte de una expresión algebraica relativamente compleja,

$$(a + b)^2 = 4(a \cdot b)/2 + c^2$$

y, después de simplificaciones, se llega a una expresión más sencilla,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Incluso, la mera presentación tipográfica de la página muestra cómo se parte de una expresión larga para arribar a una más corta.

A continuación, se reconstruye la demostración del teorema de Pitágoras proporcionada por Euclides en sus *Elementos*.

Proposición I.47. *En los triángulos rectángulos, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto* (Euclides 1991, p. 260).

Demostración. Sea el ΔABC tal que el $\angle CAB$ es recto (véase Figura 8).

Sobre AB constrúyase el $\square\, ABDE$, sobre AC el $\square\, ACGF$ y sobre BC el $\square\, BCIH$ (proposición I.46). Trácense los segmentos de recta AH, AI, BG y CD (postulado 1). Desde el punto A, trácese AJ perpendicular a BH (proposición I.12).

Por hipótesis,

$$\angle BAC \text{ es recto,}$$

y, por construcción,

$$\angle BAE \text{ también es recto.}$$

Luego, por la proposición I.14, que afirma que: *si dos rectas forman con una cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarán en línea recta,* (Euclides 1991, p. 218) los segmentos

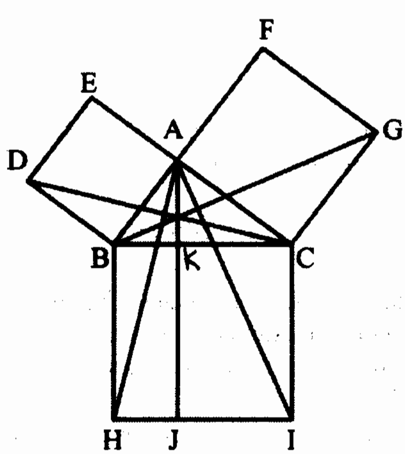

Figura 8 Proposición I.47.

AC y AE están sobre una misma recta CE. De manera análoga, AB y AF están sobre la misma recta BF. Por la misma construcción, se tiene que

$$\angle HBC = \angle DBF$$

y, por la noción común 2 (a iguales se añaden iguales), se tiene que

$$\angle HBC + \angle CBA = \angle DBF + \angle CBA$$

Pero

$$\angle HBC + \angle CBA = \angle HBA \text{ y}$$
$$\angle DBF + \angle CBA = \angle DBC,$$

de lo cual se sigue, por la noción común 1, que

$$\angle HBA = \angle DBC$$

Ahora, por la proposición I.4,

$$\Delta DBC = \Delta ABH,$$

ya que ambos triángulos tienen dos lados respectivos iguales ($DB = AB$ y $BC = BH$) y el ángulo comprendido entre estos lados correspondientes también es igual, en este caso $\angle HBA = \angle DBC$.

Se sigue, por la proposición I.41, que el área del rectángulo $BHJK$ es igual a dos veces el área del triángulo ABH, es decir,

$$\text{área}\,(\square\, BHJK) = 2\ \text{área}\,(\Delta ABH),$$

ya que tienen la misma base BH, y se encuentran entre las mismas paralelas, BH y AJ. Por la misma proposición I.41, se tiene que

$$\text{área}\,(\square\, EABD) = 2\ \text{área}\,(\Delta DBC),$$

debido a que tienen la misma base y se encuentran entre las mismas paralelas. Por tanto, por la noción común 1,

$$\text{área}\,(\square\, BHJK) = \text{área}\,(\square\, BDEA)$$

De manera análoga, se demuestra que

$$\text{área}(\square\, CIJK) = \text{área}(\square\, ACGF)$$

Como,

$$\text{área}(\square\, BHJK) + \text{área}(\square\, CIJK) = \text{área}(\square\, BCIH),$$

finalmente, por la noción común 1 (cosas iguales a una tercera son iguales entre sí), se sigue que

$$\text{área}(\square\, BCIH) = \text{área}(\square\, ABDE) + \text{área}(\square\, ACGF),$$

que es lo que se pretendía demostrar.

No cabe la menor duda de que la demostración es elegante, sofisticada y larga, esto último a pesar de que sólo se argumenta la primera parte de la demostración, la segunda únicamente se esbozó de manera análoga. Es obvio que la primera demostración, al ser más breve, puede presentar un número menor de posibles complicaciones a los estudiantes y, por lo mismo, debe ser más fácil de comprender.

¿Por qué decidió Euclides incluir la que aparece en su texto? ¿Fue por su sencillez? Esta cualidad es la que todo maestro de matemáticas busca cuando presenta un nuevo concepto a sus estudiantes. No. Como se ha mostrado, *sencillez* no fue necesariamente la cualidad de la prueba de la proposición I.47 que Euclides incluyó en los *Elementos*. Entonces, ¿era Euclides un mal maestro? De acuerdo con las dos anécdotas mencionadas al inicio de este ensayo, uno podría inferir que Euclides era severo y parco. Sin embargo, a lo largo de la distancia y el tiempo sería imposible juzgarlo sobre su actividad pedagógica y cualquier juicio que se adelantara sería altamente subjetivo y carente de sentido histórico.

Al procedimiento euclidiano de construir el conocimiento de lo sencillo a lo complejo se le conoce como "método sintético". De hecho, el enunciado de la proposición subraya su carácter geométrico. Se asevera una proposición en función de los cuadrados "construidos" sobre los lados del triángulo. Supuestamente, la demostración euclidiana tiene la gran ventaja de no introducir elementos ajenos a la concatenación de argumentos. Una vez que se han establecido las reglas, lo único que procede es deducir las proposiciones en el orden adecuado. El gran éxito de los *Elementos* radica en su carácter pedagógico. Al lector se le lleva de la mano, proposición por proposición.

Hay un gran inconveniente en cuanto al método sintético. Tal sistema ordena, como ya se ha dicho, de lo sencillo a lo complejo, pero no explica cómo avanza (o se crea) el nuevo conocimiento matemático. Es lógico pensar que Euclides no se sentó a trabajar, y después de haber propuesto una lista de definiciones, postulados y nociones comunes, se dijo a sí mismo: *Voy a desarrollar la geometría plana. ¿Cuál será el primer objeto a construir?* No. Como ya se ha señalado, la gran mayoría de las proposiciones contenidas en los *Elementos* ya habían sido descubiertas cuando apareció Euclides en escena. Algunas son atribuidas a matemáticos que lo precedieron en más de doscientos o trescientos años (Tales de Mileto o los pitagóricos, entre otros). Incluso, como ya se dijo, Hipócrates de Quios (450 a.C.) había difundido un escrito que contenía esencialmente las mismas proposiciones que el libro I del texto producido por Euclides. En ningún momento se ha atribuido a Euclides el descubrimiento original de dichas proposiciones. Su labor como revisor fue titánica, pues tuvo que encontrar las definiciones más precisas, los postulados más sencillos y el orden adecuado de las proposiciones. A pesar de que, como ya se había argumentado, el tratado no contiene una sección sobre los antecedentes lógicos y filosóficos, es claro que Euclides ha aceptado ciertos principios que sigue y respeta (Jones, 1987b). De no haber sido así, sería razonable encontrar cierto tipo de inconsistencias y lagunas. Sin embargo, su tratado fue tan exitoso que opacó versiones que se habían producido con anterioridad y se convirtió en el texto por excelencia, aún hasta el día de hoy.

Existe un segundo método en matemáticas, el analítico. Aparentemente, este nuevo vocablo no es extraño al maestro. De hecho, algunas ramas de las matemáticas lo incluyen (geometría analítica, análisis matemático y análisis numérico, entre otras). Un diccionario indica que este vocablo se refiere al proceso de separación y distinción de las partes de un todo hasta llegar a identificar sus principios constitutivos; es decir, contrariamente al método sintético, el analítico va de lo compuesto a lo sencillo. Tal vez sean los científicos naturales –sean biólogos, químicos o médicos– quienes estén más acostumbrados, de manera consciente, a llevar a cabo tal proceso. El químico, por ejemplo, tiene a su disposición diferentes técnicas o procedimientos (diálisis, calentamiento, y centrifugación, entre otros) que le permiten descomponer una sustancia para tratar de comprender cuáles son los elementos que la conforman. La tabla periódica ordena todos estos primeros elementos.

En ocasiones, el matemático también procede, mediante diferentes técnicas y estrategias, por medio de un método de separación. Es común que al enfrentar un problema complejo, un matemático intenta reestructurarlo en partes más elementales. Por ejemplo, en álgebra, al pretender solucionar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, un matemático puede proceder, entre otros, a simplificar, sustituir o igualar. En álgebra es cristalino: se trata de a partir de una expresión sumamente compleja, después del uso de diversas técnicas que están a disposición de uno se llega a lo más sencillo, los valores de las incógnitas. Obsérvese, simplemente, la tipografía subsecuente (Baldor, 1968, p. 325):

$$3(2x + y) - 2(y - x) = -4(y + 7),$$
$$3(2y + 3x) - 20 = -53$$

Al realizar las operaciones,

$$6x + 3y - 2y + 2x = -4y - 28,$$
$$6y + 9x - 20 = -53$$

transponer y ordenar

$$6x + 3y - 2y + 2x + 4y = -28,$$
$$9x + 6y = -53 + 20$$

reducir,

$$8x + 5y = -28,$$
$$9x + 6y = -33$$

dividir entre 3 ambos miembros de la segunda ecuación,

$$8x + 5y = -28,$$
$$3x + 2y = -11. \qquad (1)$$

Al multiplicar los términos de la primera ecuación por 3 y los de la segunda por 8,

$$24x + 15y = -84,$$
$$24x + 16y = -88$$

multiplicar por -1 los términos de la primera ecuación,

$$-24x - 15y = 84,$$
$$24x + 16y = -88$$

y sumar miembro a miembro los términos de ambas ecuaciones, se obtiene

$$y = -4$$

Al sustituir $y = -4$ en (1),

$$3x + 2(-4) = -11$$

y de aquí se despeja la incógnita x:

$$3x - 8 = -11$$
$$3x = -3$$
$$x = -1$$

La tipografía claramente nos muestra la simplificación de la expresión que originalmente se tenía. Para realizar dicha descomposición, al igual que un médico, físico o biólogo, entre otros, recurrimos a diversas estrategias. Partimos de un compuesto y lo fraccionamos en sus partes más elementales (en este caso, el valor particular de la x y de la y). Esto es, procedimos, metodológicamente hablando, de manera inversa a la seguida por Euclides y traicionamos nuestros principios básicos.

Desde luego, no se sugiere que no debe procederse a través del método analítico. Los dos tienen objetivos diferentes y tienen que ser usados en situaciones diferentes. Pero se requiere ser consistente, y si se ha propuesto utilizar alguno de los dos, entonces es necesario usar el mismo hasta el final, a menos que lo que se pretenda sea ilustrar la diversidad de los métodos. Sin embargo, en este caso se debe ser explícito con el alumno y mostrarle las diferencias.

V

Es muy importante tomar en cuenta que los *Elementos* no estaban dirigidos a estudiantes ingenuos e inmaduros. Más bien comprendían un texto exhaustivo y lógicamente coherente del conocimiento geométrico y aritmético que hasta ese entonces se había logrado. Euclides no buscaba introducir la demostración matemáticamente más sencilla, sino una que fuera consistente con los principios establecidos a través del desarrollo de su trabajo. Recordemos que todos y cada uno de los pasos de la demostración están autocontenidos en el tratado. Todo lo que el estudiante había aprendido con anterioridad se utilizó en la prueba de la proposición I.47. Si fuimos capaces de explicarle al alumno desde un principio cuál era la meta principal, entonces él, al final, debería tener una idea precisa de dónde partió, a dónde llegó y cómo le fue posible hacerlo.

Por el contrario, si recapacitamos sobre la prueba algebraica presentada, a pesar de ser mucho más breve y probablemente también más sencilla, ésta parece ser totalmente ajena al contexto de lo previamente tratado, pues no se requirió usar una sola de las proposiciones demostradas con anterioridad. Es más: la argumentación de la prueba contradice los principios metodológicos que nos habíamos propuesto originalmente.

Aquí no se requirió construir de lo sencillo hacia lo complejo, como lo ilustra claramente la tipografía de la página. De hecho, lo realizado por el maestro prosiguió una metodología completamente contraria. Él partió de una expresión algebraica y procedió a descomponerla en sus componentes más elementales, para poder mostrar que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Además, podríamos reflexionar que en ningún momento se hace una interpretación de cuál era el significado geométrico de a^2 o b^2. Como es claro, en la figura usada en la demostración ni siquiera fue necesario construir los cuadrados sobre a y b. La demostración pierde su carácter geométrico para adquirir un carácter algebraico.

Cuando finalmente llegamos al objetivo central, volteamos la espalda a lo conocido y nos sometimos a una metodología que desconocíamos. Si los maestros, de manera consciente, se topan con dificultades al transitar de un método a otro, ahora imagínese a los estudiantes que no tienen la menor idea de lo que sucede.

En el caso de la demostración pitagórica, es posible que el estudiante haya entendido con mayor claridad la demostración algebraica que se le presentó. Sin embargo, y esto es más importante aún, dejó de percibir un objetivo más amplio y general que le daba mayor sentido, no a una proposición en particular, sino a toda una rama de las matemáticas. En nuestro afán por enseñarles un árbol a nuestros alumnos, les hemos ocultado la grandeza y diversidad del bosque en su conjunto.

Reconocimientos

Ante todo deseo expresar mi más profunda gratitud a algunos de los individuos involucrados en la edición del presente texto para su publicación. En primer lugar, mis agradecimientos a la directora de la revista y a los árbitros seleccionados para el proceso de evaluación, cuyos comentarios, críticas y sugerencias redituaron en la mejor comprensión de algunas de las ideas aquí expuestas. Mis colegas Sergio Nobre y Edmundo Palacios colaboraron en la edición de la versión final. Mi gratitud a José Luis López López, auxiliar de investigación del Departamento de Matemática Educativa (*Cinvestav*) y estudiante del posgrado en Física del *Instituto Politécnico Nacional,* quien realizó las figuras que acompañan el ensayo. Finalmente, mi reconocimiento a mi colega Rodrigo Cambray quien leyó y comentó una versión previa. Sin exagerar, cada línea de la versión final refleja su profundo conocimiento de la materia y su espíritu crítico y perfeccionista.

BIBLIOGRAFÍA

Aboe, A. (1964). *Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.* Colombia: Norma (traducción al español de Antonio Linares. Versión original del inglés: (1964). *Episodes from the early history of mathematics.* New York, USA: Random House).

Archibald, R. C. (1934). *Outline of the history of mathematics.* Ohio, USA: MAA.

Baldor, J. A. (1967). *Geometría plana y del espacio.* Guatemala: Cultural Centroamericana.

Baldor, J. A. (1968). *Álgebra.* México: Cultural Mexicana.

Ball, W. W. R. (1908). *A short account of the history of mathematics.* Nueva York, USA: Dover (4a edición).

Berggren, J. L. (1984). History of greek mathematics: A survey of recent research. *Historia Mathematica 11* (4), 394-410.

Boyer, C. B. (1949). *A history of the calculus and its conceptual development.* New York, USA: Dover.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas.* Madrid, España: Alianza Editorial (colección Alianza Universidad, Textos 94. Traducción de Mariano Martínez Pérez. Versión original del inglés: (1968). *A history of mathematics.* New York, USA: John Wiley & Sons).

Bunt, L. N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1976). *The historical roots of elementary mathematics*. New Jersey, USA: Prentice Hall.

Burton, D. M. (1988). *The history of mathematics. An introduction*. Iowa, USA: WCB.

Cajori, F. (1894). *A history of mathematics*. New York, USA: Macmillan.

Closs, M. (1986). *Native american mathematics*. Austin, USA: University of Texas Press.

Closs, M. (1993). Maya mathematics. En *I. Grattan-Guinness*, Tome I, (pp. 143-149).

Dauben, J. W. (1991). El teorema pitagórico y las matemáticas chinas. Los comentarios de Liu Hui sobre el teorema Gou-Gu en el capítulo nueve del *Jiu Zhang Shu*. *Mathesis* *7*(3), 279-301.

Eaves, J. C. & Robinson, A. J. (1957). *An introduction to euclidean geometry*. MA, USA: Addison Wesley.

Euclides. (1991). *Los Elementos*. Madrid, España: Gredos (3 volúmenes. Traducción de María Luisa Puertas; introducción y notas de Luis Vega R.).

Eves, H. (1976). *An introduction to the history of mathematics*. New York, USA: Holt, Rinehart & Winston (4a edición).

Fraenkel, A. A. (1976). *Teoría de conjuntos y lógica*. México: UNAM (colección Cuadernos, 31. Traducción de Roberto Caso B. Versión orginal del inglés: (1996) *Theory of sets and logic*). New York: Addison Wesley.

Garciadiego, A. R. (1997). Y las matemáticas ... ¿para qué nos sirven? *Acta Universitaria 7* (1), 3-14.

Gow, J. (1884). *A short history of greek mathematics*. Cambridge, USA: Cambridge University Press (reimpresión revisada de 1968. New York: Chelsea).

Grattan-Guinness, I. (1993). *Companion encyclopedia on the history and philosophy of the mathematical sciences*. London, England: Routledge. (2 vols.).

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclids *Elements*. How did he handle them? *Historia Mathematica 23*(4), 355-375.

Heath, T. (1921). *A history of greek mathematics*. New York, USA: Dover (2 vols.).

Heath, T. (1925). *Euclid's elements*. London, England: Cambridge University Press (3 vols., 2da. ed.).

Jones, C. V. (1987a). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas. *Mathesis 3*(1), 3-14.

Jones, C. V. (1987b). La influencia de Aristóteles en el fundamento de los *Elementos* de Euclides. *Mathesis 3*(4), 375-387.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid, España: Alianza Editorial (3 vols. Colección. Alianza Universidad, números 715, 724 y 729. Traducción de A. Casal, C. Fernández Pérez, A. R. Garciadiego, M. Martínez y J. Tarrés. Coordinación y revisión de J. Hernández. Versión orginal del inglés: (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*). New York: Oxford University Press. 1972.

Knorr, W. (1975). *The evolution of the euclidean elements.* Holanda: D. Reidel (Synthese Historical Library, vol. XV).

Kullman, D. (Sin fecha). *Story problems with a flavor of the old northwest.* Copia mecanografiada. Versión inédita.

Loomis, E. S. (1968). *The pythagorean proposition.* Washington, DC: NCTM.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements.* Cambridge, USA: MIT Press.

Neugebauer, O. (1957). *The exact sciences in antiquity.* New York, USA: Dover (2da ed.).

Newton, I. (1730). *Óptica o Tratado sobre las reflexiones inflexiones y colores de la luz.* Madrid, España: Ediciones Alfaguara (versión de 1977. Introducción, traducción, notas e índice analítico de Carlos Solís).

Newton, I. (1726). *Principios matemáticos de la filosofía natural y su sistema del mundo.* Madrid, España: Editora Nacional. (Edición de 1982, preparada por Antonio Escohotado).

Proclo. (1970). *A commentary on the First Book of Euclid's Elements.* New Jersey: USA Princeton University Press (traducción, introducción y notas de Glenn R. Morrow).

Rich, B. (1970). *Geometría plana con coordenadas.* Colombia: McGraw Hill (traducción al español de Víctor Ariza Prada).

Robicseck, F. & Hales, D. M. (1981). *The maya of the dead: The ceramic codex.* Charlottesville, Virginia, USA: University of Virginia Art Museum.

Thomas, I. (1939). *Greek mathematical works. Thales to Euclid.* Cambridge, USA: Harvard University Press (Col. Loeb Classical Library, 335).

Toussaint, G. (1993). Un nuevo vistazo a la segunda proposición de Euclides. *Mathesis* 9(3), 265-294.

Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences 15*, 67-114.

Unguru, S. (1979). History of ancient mathematics: Some reflections on the state of the art. *Isis 70*, 555-565.

Van der Werden, E. B. L. (1954). *Science awakening I. Egyptian, Babylonian and Greek mathematics*. Holanda: Kluwer (traducción de Arnold Dresden).

Dr. Alejandro R. Garciadiego
Departamento de Matemáticas, 016
Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México
México

E-mail: gardan@servidor.unam.mx