Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 35 » NÚMERO 2 » AÑO 2022 » ISSN 2448-6469

ALME 35

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 35, Número 2, agosto 2022, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2022). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 35 (2)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidenta: Carmen Evarista Matías Pérez (República Dominicana); Secretaria: Elizabeth Mariscal Vallarta (México); Tesorera: Santa Daysi Sánchez González (República Dominicana); Vocal Norteamérica: Evelia Reséndiz Balderas (México); Vocal Caribe: Anelys Vargas Ricardo (Cuba); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Mónica Marcela Parra-Zapata (Colombia).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Rodolfo Eliseo D´Andrea

COLOMBIA

Maria Denis Vanegas Vasco

CUBA

Olga Lidia Pérez González
Valentina Badía Albanés

ESPAÑA

Carmen López Esteban

MÉXICO

Adriana Gómez Reyes
Carlos Daniel Prado Pérez
Daniela Pagés Rostán
Gisela Montiel Espinosa
José Rafael Couoh Noh
Lorenzo Contreras Garduño
María del Carmen Fajardo Araujo
María Graciela Treviño Garza
María Isabel Segura Gortáres
Miriam Estela Lemus
Rafael Pantoja Rangel
Silvia Guadalupe Maffey García
Silvia Ibarra Olmos
Vivian Libeth Uzuriaga López

PERÚ

Daysi Julissa García-Cuéllar

VENEZUELA

Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Luis Andrés Castillo Bracho

PRESENTACIÓN

Para este número la Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) continúa como publicación semestral editada por un equipo editorial conformado por investigadoras e investigadores en Matemática Educativa procedentes de distintos países latinoamericanos que trabajan arduamente por visibilizar las acciones y la producción académica de la comunidad.

Este número de ALME marca la transición de la Junta Directiva del CLAME, agradecemos el trabajo realizado por la anterior Junta y continuamos como comunidad Latinoamericana y como nueva Junta aunando esfuerzos para alcanzar los propósitos académicos. El número visibiliza propuestas de investigación y enseñanza en el campo de la Matemática Educativa hacia el trabajo con diferentes recursos metodológicos, desde la evaluación y el seguimiento para fortalecer cada acción realizada en la comunidad.

En el ALME número 2 del volumen 35 presentamos 11 artículos de diversas posturas metodológicas y teóricas, agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, las propuestas para la enseñanza de las Matemáticas, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas. Los documentos hicieron parte de una convocatoria especial para miembros CLAME, asistentes a las RELME 30, 31, 32, 33, 34 y conferencistas de los Webinar UPC-CLAME 2020. Presentamos también una sección especial llamada Wiphala Juventud CLAME, en la que encontramos trabajos académicos realizados por el colectivo de jóvenes que investigan de CLAME (Juventud CLAME), donde se visibilizan producciones investigativas y experiencias de aula en Matemática Educativa de la juventud latinoamericana.

Este número es fruto del trabajo arduo que realizaron las autoras y los autores y el equipo editorial para contribuir a la profesionalización de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa, y al fortalecimiento del desarrollo del pensamiento matemático en un contexto de retos e incertidumbres de la época actual.

Carmen Evarista Matías Pérez
Presidenta del Consejo Directivo CLAME
(2022-2026)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

SECCIÓN 3
ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

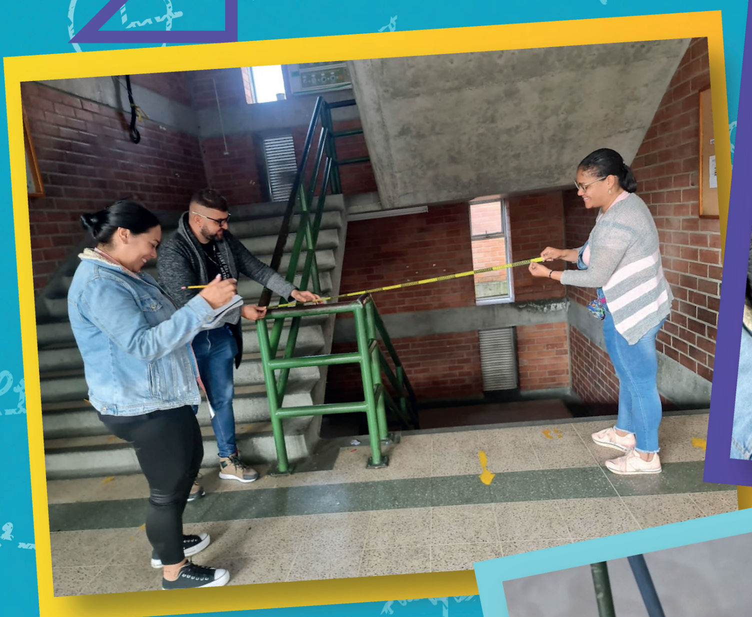
SECCIÓN 6:

WIPHALA JUVENTUD CLAME

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



VOL 35, NÚMERO 2, AÑO 2022

DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD GENERADORA DE MODELOS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

DESIGN OF A MODEL ELICITING ACTIVITY FOR THE CONCEPTUALIZATION OF THE NOTION OF LINEAR FUNCTION

Marcela Rivera Contreras, José David Zaldívar Rojas, Mariem Mederos Madrazo
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
rivera.marcela@uadec.edu.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx, m.mederos@uadec.edu.mx

Resumen
Debido a las dificultades que se han reportado en diversas investigaciones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas al respecto de una presentación tradicional de los contenidos, así como por la falta de relación de las nociones matemáticas en contextos de la vida real; y específicamente relacionados a la noción de función lineal, resaltando aquellas que hacen referencia al uso, interpretación y transformación entre sus representaciones; el presente reporte propone el diseño de una *Actividad Generadora de Modelos* partiendo desde la Perspectiva de Modelos y Modelación, con la cual se tiene como objetivo que el alumno logre conceptualizar la noción de función lineal. Se pretende realizar un pilotaje que posiblemente requiera el rediseño de la actividad para en un futuro implementar en bachillerato.

Palabras clave: actividad generadora de modelos, función lineal, perspectiva de modelación

Abstract
Due to the difficulties that have been reported in various investigations in the teaching-learning of mathematics regarding a traditional presentation of the contents, as well as the lack of relationship of mathematical notions in real-life contexts; and specifically related to the notion of the linear function, highlighting those refer to the use, interpretation, and transformation between its representations; the present report proposes the design of a Model Eliciting Activity starting from the Models and Modeling Perspective, with which the objective is that the student achieves to conceptualize the notion of the linear function. It is intended to make a pilot that may require the redesign of the activity to implement it in the future at high school.
Keywords: modelling Eliciting Activity, lineal function, modelling perspective.

Introducción

En muchas de las investigaciones, dentro del campo de la Matemática Educativa, se han reportado problemas en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, siendo los índices de reprobación y repetición de los cursos en el área consecuencia de ello. Se señalan como causa de estas dificultades diferentes factores, resaltando la desmotivación de los estudiantes por la formalidad de las clases (presentación de fórmulas, teoremas, propiedades, ejercicios rutinarios, etc.), así como también por la desconexión de las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana (García, 2013; Gutiérrez, Buitrago y Ariza, 2017). A partir de ello, se plantea la modelación matemática como una estrategia didáctica hacía la búsqueda de sentido para las matemáticas desde el planteamiento de problemas en contexto (de la "vida real") que despierten interés y motivación en el estudiantado por resolverlas por medio de las matemáticas y a su vez se logre la aprehensión de conceptos del área.

Dentro de un curso de Cálculo, específicamente en el tema de Funciones, es alrededor de la noción de función lineal en la cual se han encontrado diversas dificultades en cuanto a su comprensión y conceptualización, destacándose aquellas relacionadas con el uso, interpretación y traslado entre sus representaciones semióticas. En este mismo sentido, se han llevado a cabo investigaciones que tienen como propósito el contrarrestar parte de esta problemática, las cuales proponen actividades, laboratorios y/o secuencias de actividades que permitan a los estudiantes comprender este concepto (Damián y Morales, 2020; Núñez y Correa, 2019).

Por lo anterior, la presente investigación tiene como objetivo presentar el diseño de una *Actividad Generadora de Modelos* (MEA, por sus siglas en inglés) partiendo desde la Perspectiva de Modelos y Modelación de Doerr y Lesh (2003), donde a través de una problemática en contexto (ficticio), se involucre a los estudiantes a recurrir al uso de las matemáticas para darle solución a este, y así llegar a conceptualizar la noción de la función lineal. En el siguiente apartado se exponen los elementos más relevantes de la revisión bibliográfica que describe la problemática enunciada, así como el marco de referencia bajo el cual se desarrolla la presente propuesta.

Revisión de literatura y marco de referencia

En esta investigación se consideran como marco de referencia las dificultades que se han reportado en la noción de la función lineal, así como también se mencionan algunas de las propuestas didácticas que se han hecho a manera de aporte en solución de estos problemas. Del mismo modo, se aborda la modelación matemática desde una perspectiva particular junto con las MEA´s como actividades derivadas de esta y otros puntos importantes para su construcción.

Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la función lineal

Como lo menciona Hitt (2009), dentro del Cálculo se incluyen una gran cantidad de subtemas que a su vez se encuentran relacionados, y el no tener una comprensión profunda sobre alguno de estos recae en un desarrollo pobre en esta disciplina en general. Tal es el caso de la función lineal, la cual representa un subtema importante en esta área, pues es considerada como base en el estudio de las funciones en los cursos de esta disciplina.

Inicialmente, se habla de dificultades al presentarse la definición común de función. Habitualmente, el concepto de función es desarrollado en las clases por medio de dos conjuntos (A y B), con una correspondencia entre estos (regla) que establece una relación, pero el comportamiento variacional se limita y se esconde en esta definición (López y Sosa, 2008); se presenta entonces el diagrama de Venn, donde aparecen estos dos conjuntos como una relación uno a uno, pero cuando se tiene una relación diferente, ya sea que a dos valores de x le corresponda un valor de y, o que a dos valores de y les correspondiera un mismo valor de x, los estudiantes muchas veces no logran comprender estos casos y diferenciar entre lo que es y no es función.

Por otro lado, la predominancia de ciertos registros semióticos para representar a la función lineal lleva al estudiante a identificarla como tal, considerándose estas como prototipos, y al presentarse algún otro registro genera cierta confusión para los estudiantes al determinar que se habla del mismo objeto matemático (Artigue, 1998). Se presenta una predominancia en el uso de las representaciones algebraicas, mostrando este a su vez un aspecto formal que lleva a requerir de un alto grado de abstracción que puede resultar desfavorecedor en la comprensión de estos conceptos (Díaz *et al*., 2013).

Otras dificultades que también se reportan en estas investigaciones hablan de problemas, como el relacionar los parámetros de la ecuación de la recta (pendiente y ordenada al origen) con el comportamiento de la gráfica de la función, así como los derivados de la simbología utilizada, pues al cambiar la literal que se utiliza para hacer referencia a la variable (de $f(x)$ a y), genera confusión (Díaz *et al*., 2013; López y Sosa, 2008).

En este mismo sentido, se han desarrollado propuestas didácticas buscando dar solución a esta problemática. Investigaciones como la de Morales *et al.* (2017), Damián y Morales (2020) y Núñez y Correa (2019), proponen actividades como loterías y laboratorios de matemáticas para contrarrestar las dificultades ligadas a la coordinación entre registros o representaciones semióticas de la función lineal, las cuales tienen como objetivo que los estudiantes se involucren activamente para lograr la apropiación de este concepto.

Con el mismo objetivo de aportar en beneficio del aprendizaje de la función lineal, se han desarrollado otras propuestas direccionadas a conectar a las matemáticas con situaciones del entorno o cotidianeidad, como es el caso de Curo, Neira y Martínez (2018), y Campeón, Aldana y Villa (2018), quienes analizan el aprendizaje de los estudiantes del concepto de función lineal a partir del desarrollo e implementación de tareas de modelación por medio de situaciones en contexto.

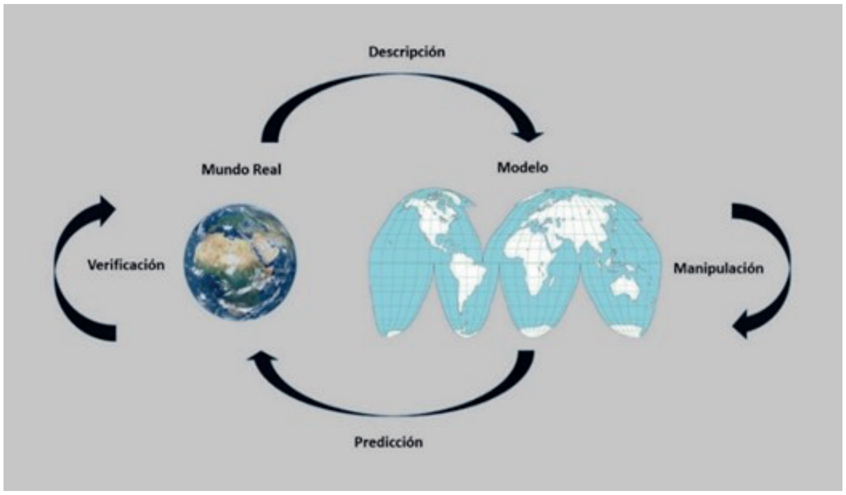
Perspectiva de Modelos y Modelación

Varios autores han definido a la modelación matemática, desde aquellos que la describen como el proceso para la obtención de un modelo, partiendo de una situación en contexto, hasta otros más que la asumen como una estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Particularmente, la Perspectiva de Modelos y Modelación hace referencia de los modelos como sistemas conceptuales expresados por medio de una notación externa, los cuales a su vez son utilizados para construir, describir o explicar otro(s) sistema(s) (o situación en contexto) para manipular o predecir este mismo (Doerr y Lesh, 2003). Estos autores también describen otras características de los modelos desde esta perspectiva, como el que se encuentran presentes desde en la mente de los alumnos, como en los medios de representación (algebraicos, verbales, gráficos, tabulares, numéricos, etc.). Así como también estos modelos pueden ser muy grandes como complejos sistemas de ecuaciones o incluso softwares, o tan pequeños como una frase aritmética o un dibujo; además de que pueden ser algunos generalizables, mientras otros no permiten un aprendizaje significativo.

Dentro de esta misma perspectiva, sus autores proponen un ciclo de modelación de cuatro pasos (ver Figura 1), partiendo de una situación o fenómeno del mundo real (o puede ser imaginado), que busca ser descrita en términos matemáticos para la obtención del modelo, el que posteriormente es manipulado para llegar a predecir la solución a la situación en contexto, por lo que debe ser traducida en estos términos para ser evaluada y verificada.

Figura 1. *Ciclo de modelación (Doerr y Lesh, 2003)*

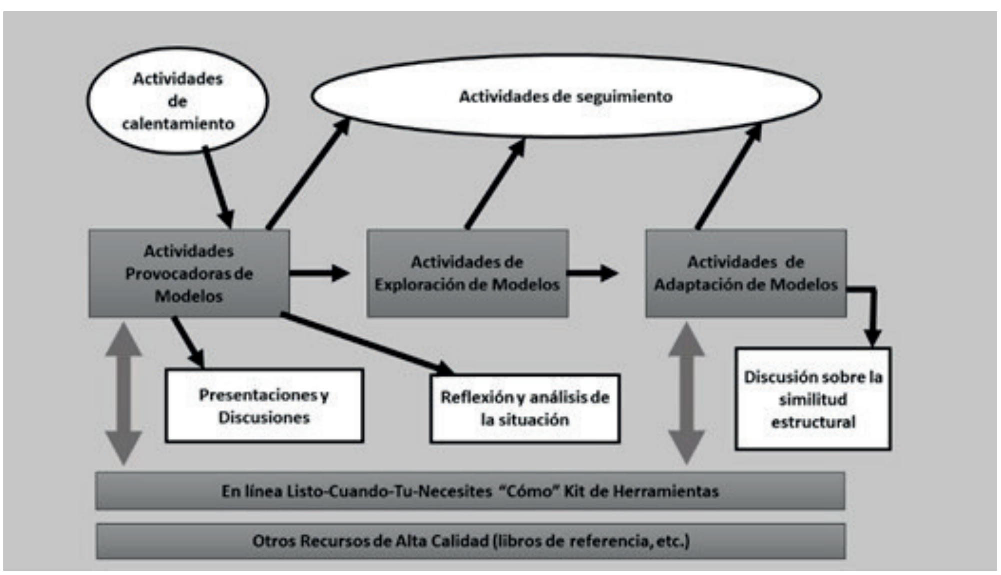


Fuente: Traducción propia.

Este proceso es cíclico, lo que involucra el requerimiento de más de un ciclo, donde se pretende modificar, refinar y/o mejorar el o los modelos obtenidos hasta llegar al que sea más adecuado de acuerdo al propósito de la situación en contexto.

Otro aspecto destacable en esta perspectiva son las secuencias de desarrollo de modelos (ver Figura 2), las cuales describen la estructura de las actividades que llevan a la obtención de modelos, donde se busca determinar las relaciones y operaciones que llevan a cabo los estudiantes, así como las restricciones para eliminar aquellas que no sean adecuadas.

Figura 2. *Esquema de organización estándar para las secuencias de desarrollo de modelos (Doerr y Lesh, 2003)*



Fuente: Traducción propia.

Inicialmente, se parte con actividades de calentamiento, las cuales suelen aplicarse un día antes de trabajar con la situación en contexto; estas actividades implican lecturas seguidas de preguntas que permiten familiarizar al alumno en el contexto en el que se trabajará la actividad y a su vez lo motivan para darle solución al problema. Seguido a ello, las actividades de exploración de modelos buscan que los alumnos desarrollen un adecuado sistema de lenguaje y representaciones (modelos) que den pie para dar sentido al objeto o concepto matemático en cuestión, mostrando los primeros modelos de los estudiantes. Por último, en las actividades de adaptación de modelos, se plantea la aplicación o ampliación del modelo, buscando en este tipo de actividades que los estudiantes puedan definir o elegir el modelo más adecuado para esta situación particular a través de su evaluación (validación) (Doerr y Lesh, 2003).

Actividades Generadoras de Modelos (MEA´s)

Los modelos matemáticos obtenidos en el ciclo de modelación anteriormente mostrado, parten de un tipo de actividades particulares para esta perspectiva, donde se proponen una serie de actividades para la enseñanza de conceptos matemáticos.

Las MEA son una herramienta de construcción de actividades que nos brinda la perspectiva de Modelos y Modelación. En ellas se simulan situaciones del mundo real, que permiten expresar, probar, revisar, transformar, ampliar o refinar los modelos que se van creando en el trascurso de la actividad (Doerr y Lesh, 2003).

De igual manera, estas actividades se encuentran regidas por seis principios establecidos por Doerr y Lesh (2003). Estos son descritos a continuación:

1. Principio de significado personal (“realidad”): se pretende que los alumnos den sentido a la situación con base a sus conocimientos y experiencias; el problema planteado debe de ser elegido y formulado de manera que ellos se encuentren familiarizados y a su vez les despierte interés.
2. Principio de construcción de modelos: la situación planteada debe dejar ver a los alumnos que es necesario construir, modificar, ampliar o perfeccionar un modelo; ellos deben detectar patrones y regularidades a partir de la situación en contexto.
3. Principio de autoevaluación: durante la resolución del problema, los alumnos van generando modelos y a la par estos van siendo evaluados y refinados para llegar al modelo más adecuado.
4. Principio de externalización del modelo (documentación del modelo): se busca que los alumnos describan detalladamente las estrategias empleadas durante la obtención de los modelos, así como también las posibles vías de solución a la actividad, los objetos matemáticos que se van descubriendo y utilizando, las relaciones, patrones, etc.
5. Principio de prototipo simple: se define el modelo prototipo que permita interpretar, explicar y dar solución a la situación problema.
6. Principio de generalización del modelo: este principio busca la reproducibilidad del modelo, donde este pueda quizá modificarse o ampliarse para ser aplicado en otras situaciones de alguna manera similares (pueda ser reutilizable).

Estos principios permiten a los estudiantes trabajar con las MEA´s de manera óptima, además de hacer que estas actividades cumplan con los objetivos que plantean, pues se busca más que nada el que el estudiante aprenda significativamente siendo este participante activo en la construcción de su propio conocimiento.
En el siguiente apartado se propone una MEA para la conceptualización de la noción de función lineal, donde se evidenciarán los elementos que componen al diseño, las secciones en las cuales se organiza la su futura implementación, las preguntas que guían al desarrollo de la propuesta, público a quien está dirigido y la estrategia a seguir para su implementación. Cabe mencionar que esta actividad se basa a partir de una actividad de un manual de actividades de calculadoras gráficas (Bonneau, 2005), rediseñándola acorde a lo que requiere una MEA.

Resultados: ¿Quién es el culpable?

A continuación, se muestra el diseño de la MEA como propuesta didáctica.

¿Quién es el culpable?

Cierto individuo es asesinado en su recámara de hotel. En primera instancia, la policía toma como única evidencia unas gotas de sangre en el piso (ver Figura 4), cerca de la puerta de salida del inmueble. En el análisis pericial se encuentra sangre ajena en los nudillos de una mano de la víctima, por lo que ellos indican que posiblemente esta sangre pertenezca al asesino, pues quizás el ahora occiso en su intento por defenderse golpeó a su agresor. Los forenses afirman que esta sangre proviene de la nariz del sujeto, relacionando esta misma con las gotas de sangre de la evidencia, quien en su huida pudo haberlas tirado.

Afortunadamente, las cámaras de seguridad registran a tres personas sospechosas que salían del hotel unos minutos después del momento del asesinato (ver Cuadro 1). La policía tiene en resguardo a estos presuntos culpables (ver Figura 3), sin embargo, por protocolos judiciales no se le pueden hacer pruebas de ADN a los sospechosos sin tener alguna prueba más que los incrimine.

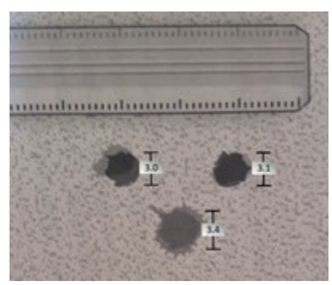
Por lo tanto, la policía toma la decisión de recurrir a un matemático para solicitarle ayuda para esclarecer quién pudo haber realizado tal atroz acto, proporcionándole la fotografía de la evidencia de las gotas de sangre y algunos datos de los sujetos, además de indicarle que la solución de Pepto-bismol tiene una densidad muy similar a la sangre del ser humano.

Tabla 1. Información de los sospechosos

Sospechoso 1	Sospechoso 2	Sospechoso 3
Nombre: Yahir N.	Nombre: Antonio N.	Nombre: Laura N.
Altura: 184 cm	Altura: 164 cm	Altura: 178 cm
Peso: 89 kg	Peso: 102 kg	Peso: 78 kg

Figura 3. *Fotografía de los sospechosos.*

Figura 4. *Evidencia del crimen*



Fuente: Elaboración propia.

<u>Sección 1. Actividades de calentamiento</u>

Con base en la situación planteada, contesta las siguientes preguntas:
1. ¿Qué datos pudieran ser relevantes para encontrar al asesino?
2. Menciona otras variables que pudieran influir para resolver el caso.
3. ¿Crees que faltaría incluir para llegar al asesino?

4. ¿Para qué crees que los policías indiquen la coincidencia de la solución de Pepto-bismol con la sangre del ser humano?
5. ¿Se podría deducir la altura del asesino a partir de la evidencia proporcionada?, ¿de qué manera?

Sección 2. Actividades de exploración de modelos

Se proporciona el siguiente material con el propósito de simular las salpicaduras de sangre de la fotografía de la evidencia proporcionada, con apoyo de la solución de Pepto-bismol.
Material:

- ✓ Cinta métrica
- ✓ Cinta adhesiva
- ✓ Solución de Pepto-Bismol
- ✓ Gotero
- ✓ Regla y escuadra
- ✓ Compás
- ✓ Tiras de cartulinas
- ✓ Marcador

Actividad 1. Completa la siguiente tabla con las indicaciones que se te dan enseguida.

Altura (cm)	Diámetro (cm) m1	Diámetro (cm) m2	Diámetro (cm) m3	Promedio de diámetro (cm)
5				
10				
…				

Indicaciones para la experimentación:

1. Pega una cinta para medir sobre la pared con ayuda de la cinta adhesiva, procurando que inicie en cero desde el nivel del piso.
2. En las tiras de cartulina que se te proporcionan, divide con el marcador cada una de estas en tres partes iguales.
3. Toma una de las tiras de cartulina y marca en esta “5 cm”. De igual manera, en cada una de las divisiones marca “m1”, “m2” y “m3”.
4. Coloca esta tira de cartulina sobre el piso, cerca de la cinta métrica pegada en la pared. Con ayuda de la escuadra posiciónate a nivel de 5 cm sobre la cinta métrica pegada en la pared, procurando que el lado recto de la escuadra quede pegado a esta a manera de formar un ángulo de 90°.
5. Rellena el gotero con la solución de Pepto-bismol y tira una gota a esta altura sobre la primera división marcada (“m1”), apoyándote con el vértice de la escuadra que da en línea recta hacia la pared.
6. Con el compás traza una circunferencia sobre la gota, de manera que el borde de esta esté sobre la circunferencia trazada. Anota las medidas del diámetro.
7. Repite este mismo paso en las otras dos divisiones (m2 y m3), rellenando nuevamente el gotero y ejerciendo la misma fuerza sobre el gotero para mantener la gota uniforme.
8. Repite los pasos del 3 al 7 para las demás alturas (10 cm, 15 cm, 20 cm …) a manera de capturar todos los datos que se te piden.
9. Calcula los promedios de los diámetros para cada altura.

Sección 3. Actividades de adaptación de modelos

Actividad 1. A partir de los datos obtenidos en la experimentación en la sección anterior, contesta lo siguiente:

1. Observando los datos recabados en la tabla, ¿qué tipo de comportamiento tienen?
2. ¿Crees que se pudiera deducir al asesino a partir de estos datos? Si tu respuesta es afirmativa, ¿de qué manera lo harías?

Actividad 2. Con apoyo de la calculadora gráfica Texas Instruments TI-Nspire CX, realiza lo que se te indica a continuación:

1. Una vez encendida la calculadora, en los íconos que se muestran en la parte inferior en la ventana de inicio, selecciona con las teclas direccionales o con el cursor la Aplicación *Listas y Hojas de Cálculo*. Presiona el botón del centro o la tecla *enter* para que esta se abra.
2. Introduce los datos obtenidos en la sección anterior, nombrando la primera columna (columna A) como *Altura* y la segunda columna (columna B) como *Diámetro*.
3. Captura los datos de las alturas en su correspondiente columna y en la columna *Diámetro* captura los promedios de los diámetros calculados en cada repetición.
4. Posteriormente presiona la tecla de *inicio* que te regresa a la pantalla principal, donde seleccionarás ahora la Aplicación *Datos y Estadísticas* (siguiente ícono) presionando *enter.* Se muestran una serie de puntos distribuidos en la pantalla.
5. Con ayuda del cursor, posiciónate sobre el eje de las "*x"* y da clic para agregar el nombre de la variable que deseas colocar, en este caso selecciona la variable *Altura*. De igual manera, para el eje de las "*y"* selecciona la variable *Diámetro*.
6. Una vez organizados los puntos, observa el comportamiento de estos. Presiona la tecla *menu* y en la opción *Analiza*r selecciona *Regresión*. Luego selecciona *Mostrar lineal (mx+b)*.

Actividad 3. Responde a las preguntas que se te plantean a continuación:

1. ¿Qué te dice la ecuación obtenida?
2. A partir de esta ecuación, ¿podrías deducir la altura del asesino?, ¿cómo?
3. Tomando la información proporcionada de los sospechosos, ¿quién de ellos crees que fue el asesino? Indica el procedimiento.
4. ¿Estás seguro de tu respuesta? De no ser así, menciona qué más habría que considerar para arrojar una respuesta más exacta.
5. Con base en tu repuesta anterior, ¿qué modificarías en tu procedimiento?
6. Si las gotas de la evidencia midieran 1 cm de diámetro, ¿qué altura tendría el asesino? Explica cómo obtuviste la respuesta.
7. ¿Y si estas midieran 4 cm o 5 cm? Explica tu respuesta.
8. ¿Crees que esta expresión algebraica te serviría para cualquier tamaño de gotas?, ¿Por qué?
9. ¿Qué características puedes observar de este tipo de comportamiento, de acuerdo a la expresión algebraica obtenida?
10. Si tu fueras el matemático a quien recurrió la policía para encontrar el asesino, ¿cómo les justificarías tu respuesta?

Discusión y comentarios finales

La MEA fue diseñada de acuerdo a la Secuencia de Desarrollo de Modelos que expone la Perspectiva de Modelos y Modelación de Doerr y Lesh (2003), así como también se consideraron los principios propuestos por estos mismos autores para la creación de actividades de modelación. La MEA *¿Quién es el culpable?,* se pretende implementar en estudiantes de bachillerato, quienes se encuentren trabajando con el tema de funciones, considerando su aplicación en tres sesiones, de acuerdo a las mismas divisiones señaladas (una sección por día).

En referencia al uso de la tecnología, el uso de la calculadora gráfica puede ser sustituido por alguna otra herramienta tecnológica que se encuentre disponible en la institución donde se implemente, como lo pudiera ser la hoja de cálculo o algún programa de geometría dinámica, como *GeoGebra*.

Con la implementación de la MEA se pretende que a través de la simulación que realicen los estudiantes al experimentar la caída de las gotas, vayan creando modelos al aproximar estas con circunferencias e incluso llevarlos a la necesidad de recurrir a otros conceptos matemáticos como diámetro (para su medición), altura y media (o promedio). Del mismo modo, en la captura de los datos y su graficación, se busca que los estudiantes con apoyo de la tecnología, logren identificar la tendencia lineal de los datos, y posteriormente, utilizando la regresión lineal, corroboren este comportamiento al obtener la ecuación de la recta; sin embargo, el objetivo no es llegar a este modelo algebraico, sino que, por medio de la construcción de diferentes representaciones de la función lineal, el alumno logre significar el comportamiento lineal al observar dicho comportamiento mediante la experimentación. A partir de ello se espera hacer una contribución para contrarrestar las dificultades que señalan las investigaciones en cuanto al manejo de las representaciones semióticas de este objeto matemático, así como la vinculación de las matemáticas con contextos reales, tomando a las MEA´s como un tipo de actividades que permiten lograr esta conceptualización por parte del estudiante.

Cabe mencionar que el presente diseño de la MEA es una versión preliminar de la propuesta didáctica, pues se pretende realizar una prueba piloto para detectar las posibles dificultades por parte de los estudiantes y con base en ello hacer las modificaciones pertinentes para definir el diseño de la propuesta didáctica para extender la investigación a futuras implementaciones a nivel bachillerato.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Bonneau, J. (2005). Forensics: Connecting Science Investigations with TI Data Collection Activities: Explorations. Texas Instruments Incorporated. Pp. 88-95.

Campeón, M. C., Aldana, E. y Villa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia, 14*(2), 115-126. https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629

Curo, A., Fernández, V. N. y Martínez, M. (2018). Una propuesta de enseñanza sobre la función lineal en el contexto de administración y negocios. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(2), (Pp. 1432-1438). Comité Lationamericano en Matemática Educativa, A. C.: México.

Damián, A. y Morales, A. (2020). Estrategia teórico-didáctica para formar el concepto de gráfica y función lineal en el registro geométrico. *Números, 103*(1), 113-121. https://drive.google.com/file/d/1ZRNh7hXP_eQXXIc9jsV1eFGLftf7CyL8/view

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (11)*41, 20-38. http://revistaunion.org/index.php/UNION/issue/view/48/47

Doerr, H. M. y Lesh, R. A., (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

García, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42, https://doi.org/10.15517/revedu.v37i1.10627

Gutiérrez, L., Buitrago, M. R., y Ariza, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova, 15*(20), 137-153, https://doi.org/10.21830/19006586.170

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En XI *Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*, Michoacán University, San Nicolás de Hidalgo, Morelia (México).

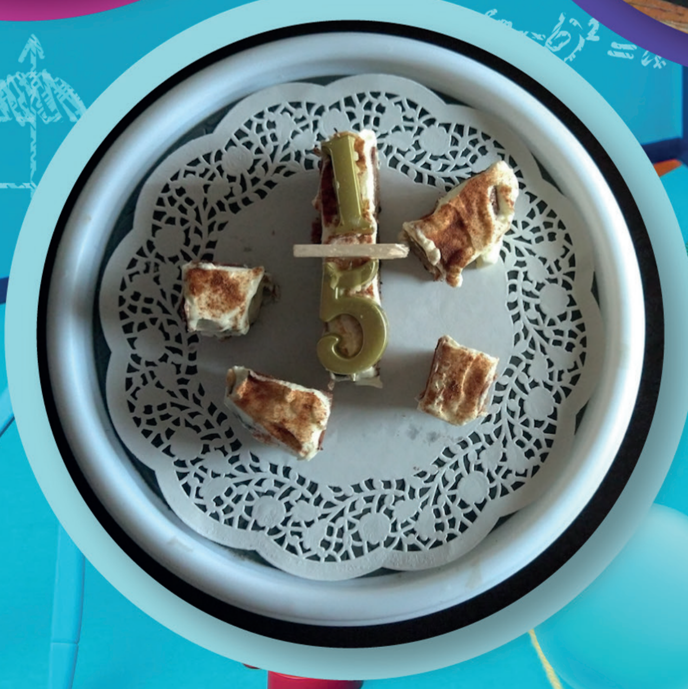
López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Pp. 308-318). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Morales, L., Rodríguez, C. Mosquera, G. y Navarro, C. (2017). Lotería gráfico-algebraica de la función lineal y afín. *VIII Congreso Iberoamericano de la Educación Matemática*, (Pp. 90-97). Madrid, España.

Núñez, K. P. y Correa, L. M. (2019). Laboratorio de matemáticas para el desarrollo del pensamiento variacional con funciones lineales en los estudiantes de noveno grado. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 4*, 263-265. https://doi.org/ 10.13140/RG.2.2.32591.308877

SECCIÓN 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



VOL 35, NÚMERO 2, AÑO 2022

DANZANDO CON LA PERIODICIDAD. UN DIÁLOGO INTERDISCIPLINAR ENTRE LAS MATEMÁTICAS, LA QUÍMICA Y EL ARTE

DANCING WITH PERIODICITY. AN INTERDISCIPLINARY DIALOG BETWEEN MATHEMATICS, CHEMISTRY AND ART

Mónica Marcela Parra-Zapata, Darlín Pulgarín Vásquez, Cristina Benítez Suárez
Secretaría de Educación de Medellín, Universidad de Antioquia-Merceditas Gómez Martínez, Merceditas Gómez Martínez (Colombia)
monica.parra@udea.edu.co, darlin.pulgarin@iemerceditasgomezm.edu.co, cristina.benitez@iemerceditasgomezm.edu.co

Resumen
Presentamos una experiencia de aula para integración de saberes y áreas, realizada con estudiantes de séptimo (12 y 13 años) y décimo (15 y 16 años) en la ciudad de Medellín-Colombia. Recreamos en el aula la periodicidad del número atómico en la Tabla Periódica, a partir de conceptos de matemáticas y ciencias naturales (química), para poner en acción movimientos dancísticos. A partir del trabajo colaborativo, los/las estudiantes reflexionaron acerca del uso de conceptos matemáticos, de la química y otras áreas del conocimiento; específicamente la modelación de covariaciones y patrones entre cantidades de magnitud que permitieron la relación periódica de la Tabla Periódica de los elementos químicos en un mismo grupo o periodo, para aplicarlo como expresión artística. La danza sirvió como medio de expresión para conectar los/las estudiantes a través de ritmos y claves.

Palabras clave: tabla periódica de los elementos químicos, periodicidad, operaciones lógico matemáticas, ritmos y claves.

Abstract
We present a classroom experience for the integration of knowledge and areas, carried out with seventh grade students (12 and 13 years old) and tenth grade (15 and 16 years old) in the city of Medellín-Colombia. We recreate in the classroom the periodicity of the atomic number in the Periodic Table, based on concepts of mathematics and chemistry, to put dance movements into action. From the work, the students reflected on the use of mathematical concepts and their support to other areas. Specifically, the modeling of covariations and patterns between magnitude quantities. Likewise, they identified in the periodicity of the Periodic Table properties of the chemical elements. Dance served as a means of expression to connect the students.

Key words: periodic table of chemical elements, periodicity, logical-mathematical operations, rhythms and keys.

Introducción

Por lo general, las clases de matemáticas y ciencias favorecen la resolución de problemas rutinarios, limitados a técnicas y algoritmos. Este tipo de problemas suelen no ser significativos para las/los estudiantes, pues no les permiten conectar las necesidades de los contextos con los problemas trabajados en el aula (Parra-Zapata et al., 2016). Encontramos también que es común en el aula que las profesoras/los profesores indiquen que sus estudiantes *no trabajan lo suficiente*, *no prestan atención* o *no se interesan por las temáticas*; estos asuntos suelen suceder, concretamente, a los bajos rendimientos en matemáticas o ciencias, y se dan tanto cuanto más avanzamos en el sistema educativo (Mata, 2012). Como una manera de aportar a la problemática anterior, propusimos una experiencia de aula de integración de saberes y áreas, en la que discutimos conceptos de matemáticas y ciencias naturales (química) con apoyo de la educación artística, especialmente la danza. Para presentar a las/los estudiantes un espacio en el que fuesen protagonistas y pudieran aproximarse a los concomimientos de estas áreas con sentido para un contexto particular y de manera lúdica.

En la experiencia favorecimos vínculos entre las matemáticas y la química al establecer relaciones entre los números atómicos (Z) de los elementos químicos y con la educación artística a través de la expresión corporal, el compás y el toque rítmico. En el proceso se llevaron a nuevos aprendizajes y reflexiones a las/los estudiantes, quienes usaron con sentido las operaciones básicas, ampliaron o practicaron la búsqueda y selección de información, la lecto escritura y el manejo de la Tabla Periódica de los elementos químicos. Por medio de ritmos, claves y colores dieron vida al formato en espiral de la Tabla Periódica al poner en marcha el patrón numérico encontrado entre los números atómicos del grupo estudiado. Adicional a esto las/los estudiantes usaron material reciclable (tarros de pintura o canecas y palos de escoba) para materializar los patrones en una danza y organizaron una presentación en subequipos por cada uno de los elementos representados y luego una presentación de danza conjunta de los siete elementos químicos del Grupo 18 de la Tabla Periódica, para transmitir la periodicidad de acuerdo a las características compartidas e identificadas entre estos y puestas en escena por medio de la danza.

La participación fue apoyada por la propuesta de formación que lideró el Grupo de Investigación, Metodología de la Enseñanza de la Química (MEQ) de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad de Antioquia-Colombia, en su taller anual, para este caso, basado en la conmemoración de los 150 años de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos. El año 2019 fue proclamado por la Organización de las Naciones Unidas (ONU) como el *año internacional de la tabla periódica*. La invitación se realizó con el apoyo del Centro de Innovación y Formación de Maestras y Maestros de la ciudad de Medellín (MOVA) para participar de la propuesta de formación *La Tabla Periódica y la Vida*, como producto de esta, la construcción de una experiencia de aula, que fue de acompañada por el MEQ.

Es así como surge esta experiencia de aula, *Danzando con la periodicidad,* que integró dos instituciones educativas públicas, ubicadas en diferentes zonas de la ciudad de Medellín-Colombia, a partir del trabajo académico integrado entre las áreas de matemáticas, la artística y la química, con estudiantes de diferentes grados de ambas instituciones. El foco estuvo en posibilitar la observación del entorno y del conocimiento de hechos, independientemente de cómo estos se clasifican en diferentes ramas del conocimiento. La propuesta interdisciplinar entre las matemáticas, la química y la artística, involucró la periodicidad de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos por medio de la observación, lectura e indagación de esta, hacia el reconocimiento de los cambios de los diferentes números atómicos, su orden creciente, las relaciones entre los protones, electrones y neutrones, las características de los elementos y algunas de sus propiedades.

Los ritmos y claves permitieron la representación de los cambios del número atómico a lo largo de una columna y periodo de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos, a través de la formación de equipos de baile de a 8, 8, 18, 18, 32 y 32 estudiantes, valores obtenidos al restar los números atómicos (Z) de los gases nobles, cada equipo danzó con un ritmo diferente, creado por los estudiantes, para luego formar una representación de la Tabla Periódica en espiral.

Precisamos que en Colombia, curricularmente hablando, química hace parte del área de ciencias naturales, la cual se compone igualmente con biología y física. De aquí en adelante, nombraremos la asignatura de química, es importante tener presenta que esta hace parte del área ya descrita. Además en adelante nos referiremos a la educación artística solo como artística. Y que para el año de publicación del artículo el Grupo de Investigación, Metodología de la Enseñanza de la Química (MEQ) ya no es grupo de investigación.

Presentamos a continuación, en este artículo, los referentes conceptuales, la metodología de desarrollo y los resultados y conclusiones de la implementación de esta experiencia de aula.

Referentes conceptuales

Concepto de interdisciplinariedad

Es posible encontrar las matemáticas en cualquier actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Por eso es importante desarrollar en las/los estudiantes aspectos básicos de ella que les permitirán desempeñarse de manera satisfactoria en contextos académicos, científicos, sociales, culturales y laborales (Pari, 2018). La interdisciplinariedad evidencia conexiones entre las diferentes áreas curriculares, demuestra cómo los fenómenos no existen por separado y que, al interrelacionarlos por medio del contenido, se diseña un cuadro de interpelación, interacción y dependencia del desarrollo del mundo. Este es un campo de estudio que cruza los límites tradicionales entre varias disciplinas académicas, o entre varias escuelas de pensamiento, por el surgimiento de nuevas necesidades o del desarrollo de nuevos enfoques teóricos o técnicos (Beri y Tello, 2006).

Según Zavala y Salinas (2017), la interdisciplinariedad corresponde a una concepción de carácter socio-crítico que promueve el aprendizaje global y que busca el desarrollo del pensamiento complejo y la práctica reflexiva. Esta, esencialmente, consiste en un trabajo común teniendo presente la interacción de las disciplinas científicas, de sus conceptos, de sus directrices, de su metodología, de sus procedimientos, de sus datos y de la organización de la enseñanza, y constituye, además, una condición didáctica y una exigencia para el cumplimiento del carácter científico de la enseñanza.

Como una estrategia pedagógica, la interdisciplinariedad implica la interacción de varias disciplinas, entendida como el diálogo y la colaboración de estas para lograr la meta de un nuevo conocimiento (Van del Linde, 2007). De otro lado, Sotolongo y Delgado (2006) la definen como el esfuerzo indagatorio y convergente entre varias disciplinas, pero que persigue el objetivo de obtener *cuotas de saber* acerca de un objeto de estudio nuevo, diferente a los que pudieran estar previamente delimitados disciplinaria o multidisciplinariamente. En consecuencia, se logra una transformación de conceptos, metodologías de investigación y de enseñanza. Implica, también, a juicio de Torres (1996), la elaboración de marcos conceptuales más generales, en los cuales las diferentes disciplinas en contacto son a la vez modificadas y pasan a depender unas de otras. La interdisciplinariedad cobra sentido en la medida en que flexibiliza y amplía los marcos de referencia de la realidad, a partir de la permeabilidad entre las verdades de cada uno de los saberes (Follari, 2007).

La interdisciplinariedad y su puesta en acción

La interdisciplinariedad es uno de los conceptos recurrentes en el lenguaje educativo, el cual consiste en la coordinación, prevista de antemano, de dos o más disciplinas para estudiar un área o concepto determinado. Supone, por tanto, la interacción de estas disciplinas a través de diversos canales de comunicación. Estas pueden ir desde el simple intercambio de ideas hasta la integración mutua de leyes, teorías, hechos, conceptos, habilidades, hábitos, normas de conducta, sentimientos, valores a desarrollar, metodologías, formas de organización de las actividades y de las investigaciones (Carmona-Mesa et al., 2019).

En este sentido, destacamos la necesidad de articular las áreas, con sentido para las/los estudiantes, a partir de problemas complejos que intentan superar una visión sumativa de saberes que termina forzando una supuesta integración de contenidos (Beri y Tello, 2006). La articulación de las áreas en esta experiencia, involucró la relación entre la periodicidad de la Tabla Periódica, con una lectura atenta de los Elementos Químicos, la observación del orden creciente de los números atómicos a lo largo de un Grupo o Familia, el reconocimiento de los cambios de los diferentes números atómicos desde su orden creciente, las relaciones entre los protones con el número atómico (Z) y, a su vez, con los electrones y neutrones, las características de los elementos en su estado elemental y algunas de sus propiedades.

Además de la posibilidad de realizar una lectura de algunos de los formatos de tabla periódica, como el formato largo propuesto para esta experiencia de aula y el reconocimiento del contenido de la información a partir de los formatos de tabla periódica que poseen las/los estudiantes. Este trabajo interdisciplinar, se favorece de acuerdo con las particularidades de las/los estudiantes y su diversidad porque, además de integrar las áreas, integró estudiantes de dos instituciones educativas y de diferentes grados; es ahí en donde está la mayor riqueza de esta experiencia, porque se vinculan características, intereses, necesidades y la cultura, que a través de la danza facilita la expresión y el desarrollo de habilidades comunicativas y artísticas.

Los conceptos disciplinares en el proceso de desarrollo interdisciplinar

En este proceso de desarrollo interdisciplinar, cada una de las áreas fortaleció asuntos propios de su disciplina. Se trata, entonces, de integrar no solo conocimientos, sino también de realizar un trabajo cognitivo en el que están implícitas actividades de análisis, donde las representaciones desempeñan un papel importante en los esquemas que se puedan formular acerca de los eventos por enfrentar y, a través de ellas, se favorezca la comprensión y el aprendizaje (Trejo y Camarena, 2011).

Es menester señalar la importancia que tiene la Tabla Periódica para la enseñanza de la química, especialmente si tomamos en cuenta que para visualizar su evolución en el tiempo, debemos repasar buena parte de los principios, leyes y teorías que forman parte de la matriz disciplinaria del paradigma de la química. Desde la química, el poder realizar lectura en diferentes formatos de la tabla periódica y reconocer los cambios de los diferentes números atómicos, su orden creciente, las relaciones entre los protones, electrones y neutrones, las características de los elementos y algunas de sus propiedades.

Para hablar de la periodicidad, fue importante el aporte de la historia de la Tabla Periódica y estudiar las propuestas de Döbereiner y sus triadas, las octavas de Newlands, el trabajo de Meyer y el de Mendeléyev, como una construcción conjunta, humana y en constante desarrollo para que las/los estudiantes se acercaran a este conocimiento y lograran establecer esa relación creciente entre los números atómicos, a partir de la diferencia de estos a lo largo de un Grupo o Familia, encontrando la siguiente relación *8, 8, 18, 18, 32 y 32* la cual se da a lo largo de todas las Familias de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos.

Por su parte, con las matemáticas se articuló la realización de operaciones básicas y secuencias lógicas para establecer la modelación de covariaciones y patrones entre cantidades de magnitud, entre los números atómicos a lo largo de los periodos y columnas, los protones, electrones y neutrones en un átomo neutro. Lo anterior posibilitó leer, entender, interpretar, comprender y elaborar representaciones mentales, a partir del fenómeno de estudio de la Tabla Periódica en donde surgieron los conceptos de modelo matemático, visualización, conversión, imagen, variación y covariación. Asuntos que se evidenciaron tangencialmente en el desarrollo de esta experiencia.

La Tabla Periódica plantea cuestiones básicas cuya explicación matemática, de forma deductiva y rigurosa desde los primeros principios, supone un enorme y fascinante desafío intelectual. Un ejemplo es la propia noción de periodicidad en la ordenación de los elementos; otro son los conceptos de valencia, orbital y energía de ionización, pero también el que haya ciertos números especiales de electrones (2, 10, 18, 36, 54…) que impiden a los gases nobles participar en alguna reacción.

Desde la artística, la danza aportó elementos como la expresión corporal, el movimiento, los ritmos al compás de claves y la puesta en escena al que convoca el baile en armonía con la danza, dándole a esta un sentido, la periodicidad. Los ritmos y claves permitieron la representación de los cambios del número atómico a lo largo de una columna y periodo de la Tabla Periódica, a través de la formación de equipos de baile. En el marco sociocultural actual, la Expresión Corporal es un término ambivalente y polisémico que puede ser definido, según Arteaga et al., (1997), como un proceso de exteriorización de lo más oculto de nuestra personalidad, a través del cuerpo o, bien, como aquella técnica, que a través del cuerpo, trata de interpretar las sensaciones y sentimientos.

Por otro lado, el ritmo tratado a través de las canciones, presenta sus dos aspectos más significativos: el ritmo y el movimiento, y el ritmo y la palabra. Comenzaremos con actividades de movimiento y ritmo para contribuir a que las/los estudiantes empiecen a desarrollar sus capacidades para expresarse con todo el cuerpo de una forma libre y creativa, presentaremos actividades que les lleven a explorar todo el espacio y los diversos movimientos libres o siguiendo un ritmo marcado que pueden realizar con todo el cuerpo o parte de él.

La oportunidad y la posibilidad de contar con una experiencia pedagógica significativa, desde un sentido transversal, puede generar una mayor claridad conceptual de una disciplina artística de dominio propio, tomando referentes y experiencias desde otra área de conocimiento en beneficio de su propia disciplina. Por consiguiente, planteamos como respuesta la oportunidad de búsqueda y aplicación de estrategias que le permitiera a las/los estudiantes, ampliar el espectro de posibilidades de comprensión y apropiación de conocimientos a partir de experiencias significativas relacionadas con los referentes presentados.

Metodología

La Organización de las Naciones Unidas (ONU) declaró el 2019 como el Año Internacional de la Tabla Periódica, en honor a los 150 años desde que, en el año 1869, el químico ruso Dimitri Mendeléyev diera a conocer su primera versión de esta. Aquel sistema de ordenación, organiza los elementos según su número de protones y sus afinidades químicas y se ha convertido en un icono de la ciencia y la cultura.

A propósito de ello, en esta experiencia recreamos la periodicidad del número atómico en la Tabla Periódica, a partir de conceptos básicos de matemáticas y química, para la creación de una danza según el formato en espiral. Aquella la desarrollamos entre 3 profesoras, 1 profesor y 118 estudiantes de séptimo (12 y 13 años) y décimo (15 y 16 años) grado en las instituciones educativas Villa Flora y Merceditas Gómez Martínez, dos instituciones de la ciudad de Medellín-Colombia; en el marco de la formación *La Tabla Periódica y la Vida*, planteada y desarrollada por el grupo MEQ con el apoyo de MOVA (Antolínez y Alzate, 2021). En ella abordamos la interdisciplinariedad en la formación matemática escolar.

La experiencia se llevó a cabo en cinco (5) momentos que presentamos en la Figura 1 y que se relacionaron con la secuencia de actividades didácticas que propusimos para llevar a cabo el proceso de interdisciplinariedad. Las/los estudiantes usaron herramientas matemáticas y movimientos dancísticos para interpretar la periodicidad de la Tabla Periódica.

En el primer momento, *diseño del plan institucional*, analizamos los componentes de diseño curricular y seleccionamos las/los estudiantes participantes.

En el segundo momento, *características de la Tabla Periódica*, iniciamos el estudio de las características de acuerdo con las variaciones de los números atómicos.

En el tercer momento, *tabla rítmica*, estudiamos las características y la distribución de los gases nobles y el estudio del formato en espiral de esta. En este momento también realizamos la elección de los distintivos y el ritmo a interpretar por cada colectivo de trabajo.

Figura 1. *Momentos de la implementación metodológica*

Fuente: elaboración propia.

En el cuarto momento, *una tabla en espiral*, realizamos diálogos e improvisaciones con los ritmos y formamos la estructura completa para la representación en espiral de la Tabla Periódica por medio del Grupo 18 de la misma. Este momento concluyó con el montaje final de la danza.

En el quinto momento, *la danza espiral*, realizamos la presentación de la danza que representan los elementos del Grupo 18 de la Tabla Periódica en un modelo en espiral.

Análisis y discusiones del trabajo realizado por las/los estudiantes

El objetivo planteado fue recrear la periodicidad del número atómico (Z) en la Tabla Periódica de los Elementos Químicos, a partir de conceptos básicos de las matemáticas y la química, para la puesta en acción de movimientos dancísticos de acuerdo al formato en espiral con estudiantes de séptimo y décimo grado.

Diseño del plan institucional

Al iniciar la experiencia, las tres profesoras autoras del artículo analizamos los componentes del diseño curricular relacionados con la malla curricular, el plan de estudios y el trabajo académico de las áreas de matemáticas, artística y química (Figura 2). Reconocimos allí la posibilidad de recrear en las clases la periodicidad del número atómico (Z) en la Tabla Periódica, a partir de conceptos de matemáticas y química, para poner en acción movimientos dancísticos. Específicamente, la modelación de covariaciones y patrones entre cantidades de magnitud, directamente en la periodicidad de la Tabla Periódica y la danza como medio de expresión para conectar las/los estudiantes.

Figura 2. *Desarrollo del momento 1*

CONCEPTOS CIENCIAS NATURALES (QUÍMICA)	CONCEPTOS MATEMÁTICAS	CONCEPTOS ARTÍSTICA
• Agrupación. • Representación gráfica y simbólica. • Modelación de covariaciones. • Patrones. • Cantidad de magnitud. • Secuencias y series. • Lógica. • Simetría.	• La tabla periódica. • Formatos de presentación. • Formato en espiral. • Periodicidad del número atómico.	• La danza. • Movimientos dancísticos. • Ritmo. • Expresión corporal. • Creación de instrumentos musicales.

*Profesoras en planeación conjunta. *Organización curricular.

Fuente: elaboración propia.

Características de la Tabla Periódica

En este momento, estudiamos la Ley de Periodicidad o Ley Periódica como la base de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos, la cual postula que las propiedades químicas y físicas de dichos elementos dependen del número atómico (Z) que es el número de protones que hay en el núcleo del átomo de un elemento. Esta ley indica que cuando los elementos se colocan en orden creciente de su número atómico, tiene lugar una repetición periódica de ciertas propiedades físicas o químicas de aquellos.

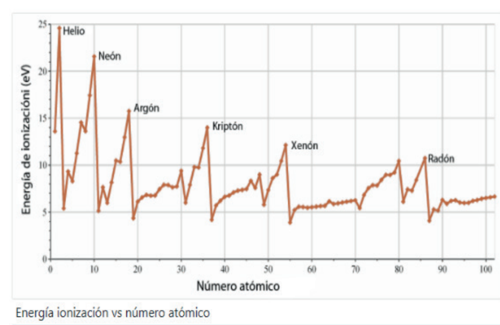
Fue posible realizar una representación de los cambios del número atómico a lo largo de una columna y periodo de la Tabla Periódica. Las/los estudiantes pudieron representar y modelar matemáticamente la covariación y los patrones entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad. Reconocieron en la periodicidad las diferentes propiedades de los elementos químicos. La danza sirvió como medio de expresión, de conexión y puesta en escena de los saberes en la escuela.

Las/los estudiantes pudieron reconocer en la periodicidad de la Tabla Periódica las diferentes propiedades de los elementos químicos e indagar por las características físicas y químicas de cada elemento del Grupo 18; la danza sirvió como medio de socialización de ideas, conocimientos, saberes y expresión que permitía conectar a los estudiantes con algo que estaba más allá. La Danza fue, entonces, ese medio de conexión y puesta en escena de los saberes en la escuela. Las/los estudiantes asumieron liderazgo y trabajaron de manera colaborativa, fue una actividad que integró al colectivo de estudiantes, los cuales acordaron los ritmos, realizaron modificaciones y fueron partícipes de todas las ideas para la presentación de la muestra artística (Figura 3). Las tres profesoras, autoras de este artículo, sostuvimos un diálogo constante sobre el desarrollo de la experiencia, dado que cada momento se implementaba de manera independiente en cada Institución Educativa.

Por último, discutimos con las/los estudiantes que si bien la Tabla Periódica alberga una cantidad de relaciones importantes, ella no muestra todas las relaciones de semejanza de los elementos químicos y que existen algunas relaciones que pasan desapercibidas al orden establecido por la tabla convencional, como son el principio de singularidad, el efecto diagonal y el efecto de par inerte (Restrepo, 2004).

Figura 3. *Desarrollo del momento 2*

*Modelo en espiral.



*Energía de ionización vs número atómico.

Fuente: Periodicspiral, 2019.

Tabla rítmica

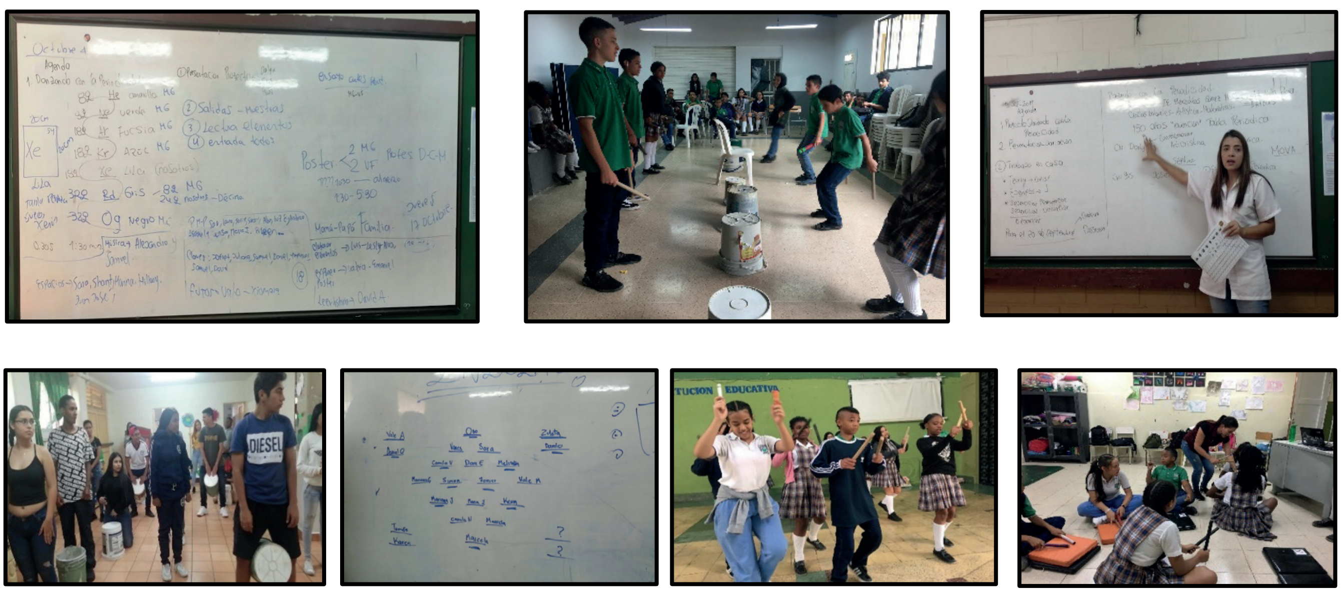
En este momento indagamos por las características y la distribución de los gases nobles que son, por ejemplo, un Grupo de elementos químicos con propiedades muy similares, tales como: que bajo condiciones normales son gases monoatómicos inodoros, incoloros y presentan una reactividad química muy baja y están ubicados en el Grupo 18 de la Tabla Periódica. De ellos estudiamos, específicamente, la representación de los cambios del número atómico y periodo, los cuales representan los números atómicos de los Gases Nobles Helio (2), Neón (10), Argón (18), Kriptón (36), Xenón (54), Radón (86) y el Oganesón (118).

Para el proceso dancístico, formamos equipos cuya cantidad de integrantes es la diferencia entre los números atómicos del Grupo 18 de la Tabla periódica, esto es, equipos de baile de 8, 8, 18, 18, 32 y 32 estudiantes. Y recurrimos al formato en espiral de la Tabla Periódica para la realización del montaje coreográfico (Figura 4). A este momento se vinculó otro profesor del área de matemáticas quien apoyó en una de las instituciones el montaje. Matemáticamente, abordamos asuntos de la variación y los patrones implícitos en la diferencia entre los números atómicos, reconociendo allí la variación como un modo dinámico de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, de la misma o distintas magnitudes, en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003). Estos asuntos se extrapolaron a otras situaciones de sucesiones y series donde aparece implícita la variación.

En este momento, realizamos, además, ensayos grupales de los ritmos y estudiamos las operaciones básicas que relacionan a los protones, los electrones y los neutrones. Basadas en las lecturas, interpretaciones y puestas en escena realizadas por las/los estudiantes, identificamos que fue posible realizar una representación de los cambios del número atómico a lo largo de una columna y periodo de la Tabla Periódica. Las/los estudiantes pudieron representar y modelar matemáticamente la covariación y los patrones entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad. Reconocieron en la periodicidad las diferentes propiedades de los elementos químicos (Figura 4).

Las tres profesoras y el profesor mantuvimos la conversación constante sobre el desarrollo de la experiencia, dado que se implementaba el momento de manera independiente en cada Institución Educativa.

Figura 4. *Desarrollo del momento 3*



* Estudiantes en montaje dancístico a través del estudio de la periodicidad.
Las profesoras y el profesor acompañan el proceso.

Fuente: Archivo fotográfico de las autoras.

Una Tabla en espiral

En este momento, realizamos diálogos e improvisaciones con los ritmos y formamos la estructura completa para la representación en espiral de la Tabla Periódica por medio del Grupo 18. En esta visualización, los elementos son representados en hexágonos que permiten ser acomodados de manera más sencilla. El inicio de la tabla está en el centro con el hidrogeno y los demás elementos comienzan a ubicarse en círculos en el sentido de las manecillas del reloj desde dentro hacia afuera.

Según Moran, la representación en espiral de la Tabla Periódica resuelve tres inconvenientes que tienen las representaciones tradicionales. Primero, el hidrogeno tiene propiedades únicas distintas a cualquier otro elemento en la tabla (periódica), entonces, por esencia, no pertenece a ninguna de las 18 columnas (Grupos) de la Tabla Periódica. Segundo, que los elementos de cada periodo del bloque f – los lantánidos y actínidos – tienen propiedades similares, aunque no se representen en columnas en tablas periódicas tradicionales. Tercero, que el diseño de columnas y filas que tienen las tablas tradicionales no muestra la continuidad entre los elementos, lo que sí se puede apreciar en un diseño en espiral (Moran, 1997, citado en Periodicspiral, 2019).

La danza sirvió como medio de expresión, de conexión y puesta en escena de los saberes en la escuela. Y junto con las matemáticas y sus representaciones espaciales permitieron recrear el formato en espiral por medio de la danza que realizaron las/los estudiantes. En este sentido, esta experiencia favoreció la interdisciplinariedad mediante la asociación de asignaturas que comparten contenidos, cuyos componentes pueden integrarse entre sí, de este modo logramos encontrar sinergias entre las disciplinas. Este trabajo multidisciplinar, se favoreció de acuerdo con las particularidades de las/los estudiantes y su diversidad; es ahí en donde está la mayor riqueza de esta experiencia, porque se vincularon características, intereses, necesidades y la cultura a través de la danza. El diálogo entre las profesoras y el profesor también continuó en este momento.

Figura 5. *Desarrollo del momento 4*

* Estudiantes en montaje dancístico a través del estudio de la periodicidad.
Las profesoras y el profesor acompañan el proceso.
Fuente: Archivo fotográfico de las autoras.

La Danza espiral

En este momento, participamos en la Exposición de Clausura de la formación *La Tabla Periódica y la Vida*, la cual se realizó por medio de un evento llevado a cabo en las instalaciones de MOVA, con la participación de la comunidad educativa de Medellín, profesoras/profesores, estudiantes de todas las áreas y de diversos grados de escolaridad, acudientes e invitadas/invitados especiales de la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín y de la Universidad de Antioquia.

El día previo a la presentación se realizó el ensamble de la danza, dado que, por efectos de distancia de las Instituciones Educativas, cada montaje se realizó de manera independiente en cada una de ellas (Figura 6). En el evento las/los 118 estudiantes, en compañía de las 3 profesoras y el profesor, realizaron la presentación artística de danza que habían realizado para visibilizar el modelo en espiral de la Tabla Periódica y las características del Grupo 18 estudiadas en la experiencia (Figura 6).

Figura 6. *Desarrollo del momento*

* Estudiantes en presentación en el evento de cierre.
Las profesoras y el profesor acompañan el proceso.

Fuente: Archivo fotográfico de las autoras.

Consideraciones finales

En este artículo nos propusimos reportar una experiencia de integración curricular en el aula para las áreas de matemáticas, química y artística, que tuvo como propósito que las/los estudiantes trabajaran con la periodicidad de la Tabla Periódica y, a partir de ella, construyeran algunas nociones matemáticas y usaran el movimiento al expresarse con la danza.

La integración curricular, mediante la asociación de asignaturas que comparten contenidos o cuyos componentes pueden integrarse entre sí, favoreció el aprendizaje con sentido en el aula. Lo anterior, de acuerdo con las particularidades de las/los estudiantes y su diversidad. De este modo, proponemos encontrar sinergias entre las disciplinas (química, matemáticas y artística) de manera que las/los estudiantes puedan comprender la interdependencia entre ellas.

Finalmente, esta experiencia fue una posibilidad de diálogo, inclusión, diversidad y construcción de conexiones significativas en el aula. Además, tuvo un alto potencial para establecer redes de ciudad al vincular dos instituciones educativas diferentes de Medellín que convergemos en intenciones educativas y en el escenario de ciudad.

Agradecimientos

A la Institución Educativa Villa Flora-Medellín-Colombia, en especial a Carlos Alberto Mazo Loaiza (rector) y la Institución Educativa Merceditas Gómez, en especial a Luz Dary Usuga Usuga (rectora), por posibilitar que esta experiencia se llevara a cabo. *A los y las estudiantes participantes de ambas instituciones (séptimo y décimo grado-2019) por aceptar participar, por soñar con nosotras, por danzar con las ciencias, las matemáticas y las artes, por su alegría y entrega en cada una de las acciones que emprendimos en el desarrollo de esta experiencia de aula.* Al profesor José David Restrepo por vincularse en parte de la implementación de la experiencia. Y a Sebastian Aguirre Duque (sadw621@gmail.com) por la corrección de estilo y normas técnicas.

Referencias bibliográficas

Antolínez, G. y Alzate, M. (2021). La tabla periódica y la vida, experiencia innovadora inter y transdisciplinaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (número extraordinario)*, 2705-2711.

Arteaga, M., Viciana, V. y Conde, J. (1997). *Desarrollo de la expresión corporal*. Editorial Inde.

Beri, C. y Tello C. (2006). Una aproximación a la compleja trama entre interdisciplina y formación universitaria. *Revista Question, 11*, 1-12.

Carmona-Mesa, J., Arias, J. y Villa-Ochoa, J. (2019). Formación inicial de profesores basada en proyectos para el diseño de lecciones STEAM. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/15590/1/CarmonaMesaJaime_2019_Formaci%C3%B3nProfesoresSTEAM.pdf

Follari, R. (2007). La interdisciplina en la Docencia. *Polis, Revista Latinoamericana, 16*. https://journals.openedition.org/polis/4586.

Mata, Y. (7 al 9 de junio de 2012). *Interpretación matemática de la tabla periódica* [conferencia]. VIII Festival Internacional de Matemática.

Pari, A. (2018). Una experiencia educativa de ducho en la Amazonia. En A. Sales y N Martins (Orgs.), *Trabalho Didáctico: Trajectórias de Pesquisas*. pp. 21-37. Life Editora.

Parra-Zapata, M., Parra-Zapata, J., Ocampo-Arenas, C. y Villa-Ochoa, J. (2016). El Índice de masa corporal: una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Revista números, 92*, 21-33.

Periodicspiral. (2019). Periodic Spiral. https://periodicspiral.com/

Restrepo, I. (2004). Tendencias mundiales en la gestión de recursos hídricos: desafíos para la ingeniería del agua. *Ingeniería y competitividad, 1*(6), 63-70.

Sotolongo, P. y Delgado, C. (2006). La complejidad y el diálogo transdisciplinario de saberes. Capítulo IV. En publicación. En Red de Bibliotecas Virtuales de Ciencias Sociales de América Latina y el Caribe de la red CLACSO (Ed.). *La revolución contemporánea del saber y la complejidad social. Hacia unas ciencias sociales de nuevo tipo*. pp. 65-77. Red de Bibliotecas Virtuales de Ciencias Sociales de América Latina y el Caribe de la red CLACSO. http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/ar/libros/campus/soto/Capitulo%20IV.pdf

Torres, J. (1996). *Globalización e interdisciplinariedad: El currículum integrado*. Morata.

Trejo, E. y Camarena, P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Educación Matemática, 23*(2), 65-90.

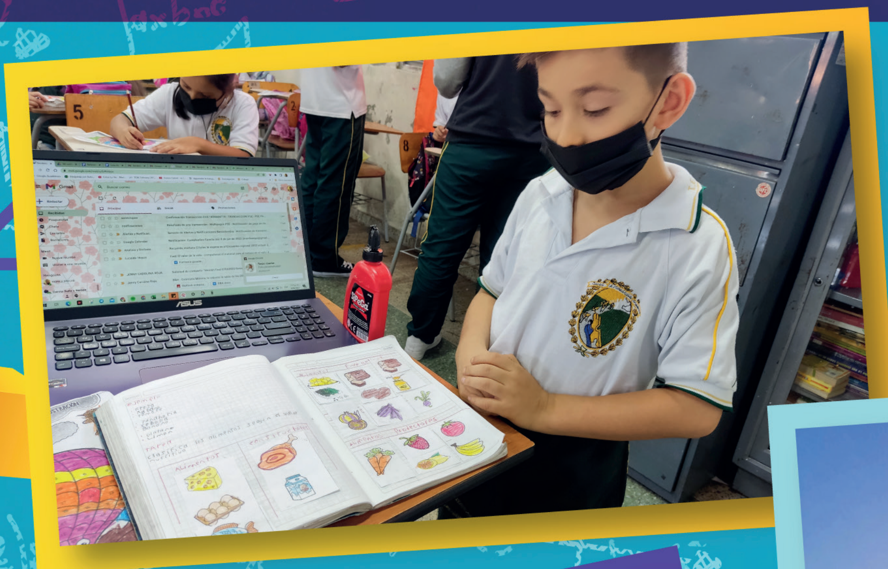
Van del Linde, G. (2007). ¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? *Cuadernos de Pedagogía Universitaria, 4*(8), 11-12.

Vasco, C.(2003). Objetivos específicos, indicadores de logros y competencias ¿y ahora estándares? *Educación y cultura, 62*, 33-41.

Zavala, C. y Salinas, J. (2017). La interdisciplinariedad en el aula de Educación Secundaria: una investigación a través de la opinión del profesorado de las áreas de Música, Lengua Castellana y Literatura, y Ciencias Sociales. *European Scientific Journal, 13*(19), 281-191. https://zaguan.unizar.es/record/64447/files/texto_completo.pdf

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



VOL 35, NÚMERO 2, AÑO 2022

USOS, FUNCIONAMIENTOS Y FORMAS DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN SITUACIONES DE INGENIERÍA

USES, FUNCTIONAMENTS AND FORMS OF THE COMPOSITION OF FUNCTIONS IN ENGINEERING SITUATIONS

Isabel Tuyub Sánchez, Yahaira Zapata Canché
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
isabel.tuyub@correo.uady.mx, yahairaeloisa@hotmail.com

Resumen:
Se presentan los resultados de un estudio socioepistemológico que tuvo como objetivo evidenciar la funcionalidad de la matemática a partir de los usos, funcionamientos y formas en los que se presenta el conocimiento matemático *composición de funciones* en situaciones relacionadas con el conocimiento ingenieril. Con base en los hallazgos, se propone una epistemología de usos la cual permitirá crear un marco de referencia para el rediseño de discurso matemático escolar.

Palabras clave: socioepistemología, usos, composición de funciones, cálculo

Abstract:
The results of a socio-epistemological study are presented whose objective was to demonstrate the functionality of mathematics based on the uses, functionaments and forms in which mathematical knowledge is presented, *composition of functions* in situations related to engineering knowledge. Based on the findings, an epistemology of uses is proposed which will allow the creation of a reference framework for the redesign of school mathematical discourse.

Key words: Socioepistemology, uses, composition of functions, calculus.

Introducción

Actualmente existe una necesidad por atender diversas problemáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en los diferentes niveles educativos, debido a los constantes retos y demandas actuales (como el modelo educativo por competencias) que requieren de nuevas formas y herramientas útiles para atender el quehacer docente.

Particularmente, en la ingeniería, Zúñiga (2007) reporta que en los cursos de Cálculo los alumnos no logran mirar la utilidad de los conocimientos ya que se centran en resolver ejercicios repetitivos y memorísticos y, los pocos ejercicios que se proponen, por lo general, nunca corresponden a la realidad y que, posiblemente, se deba a que el conocimiento se trata fuera de contextos apropiados.

Tal es el caso del conocimiento matemático *composición de funciones* cuya enseñanza se centra en promover una definición matemática seguida de ejercicios analíticos (sustitución de funciones) y no se deja ver la utilidad que tiene en el ámbito de la ingeniería.

Una propuesta para atender las acciones que involucran a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, para generar una conexión entre la matemática y la ingeniería, es el rediseño del discurso matemático escolar (dME) (Mendoza, Cordero, Solís y Gómez, 2018), el cual reconoce la funcionalidad de la matemática desde contextos socioculturales y su incorporación al sistema educativo.

Así es como en el presente escrito se desea atender la problemática del no reconocimiento de los usos del conocimiento matemático composición de funciones en la ingeniería, al abonar a la falta de marcos de referencia que permitan resignificar dicho conocimiento en el dominio de la ingeniería.

Para ello, se desea evidenciar la utilidad del conocimiento en cuestión a partir del reconocimiento de sus usos, funcionamientos y formas que se presentan en el quehacer/situaciones y/o conocimientos propios de la ingeniería desde una perspectiva Socioepistemológica apoyada de una metodología cualitativa de corte exploratoria.

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME)

Este trabajo se fundamentó en TSME, la cual, modela la construcción social del conocimiento matemático o conocimiento puesto en uso desde una perspectiva situada (Cantoral, 2013). Lo anterior permite analizar los usos del conocimiento matemático, en este caso la composición de funciones, en escenarios donde importa la actividad que rodea a este conocimiento, así como el contexto desde el cual emergen sus usos y las condiciones que lo hacen ser una composición de funciones.

Lo anterior permite que el conocimiento obtenga nuevas significaciones, que dentro de la TSME se denomina *resignificación del conocimiento matemático* respecto a su uso, debido a que la función y la forma de dicho uso va de acuerdo con lo que la comunidad usa y hace para lograr sus objetivos (Domínguez, 2003).

Esto obliga a formular epistemologías del conocimiento cuya centración está en su constitución social natural, es decir, en lo que hace que el conocimiento sea de esa manera y no de otra (Tuyub, 2010).

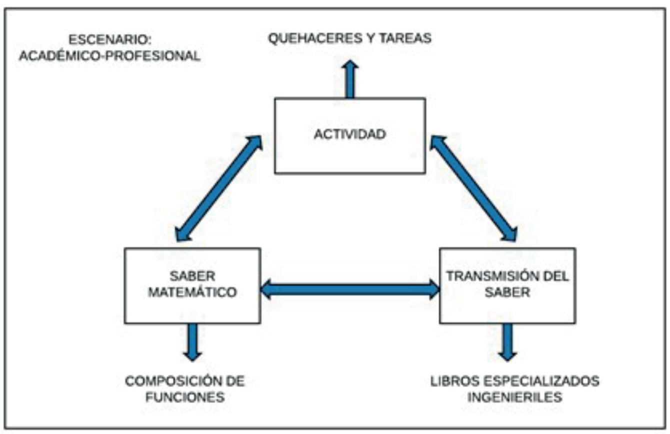
Es así como el método socioepistemológico aportó en la investigación una visión que considera, desde una perspectiva múltiple y sistémica, el estudio de los procesos de construcción social del conocimiento matemático, en contextos donde la matemática se resignifica, además de considerar la interacción entre cuatro dimensiones: lo epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural asociado al saber.

Con respecto a los contextos en los cuáles analizar la emergencia del uso, se realizó una revisión bibliográfica (Valdivia y Parraguez, 2013; Meel, 1999; Hasssani, 1998; Larsson, 2006; Engelke, 2007), considerando las cuatro dimensiones del saber. Nos percatamos que, desde el punto de vista sociocultural del saber composición de funciones, no existían muchos indicadores en otros espacios en los cuales pudiéramos observar situaciones específicas de uso, es decir, no se tenían contextos claros en los cuales comenzar la búsqueda de los usos. De ahí la decisión de tomar una metodología de corte descriptivo-exploratorio.

Al cuestionarnos sobre dónde o cómo encontrar dichos contextos o situaciones en los cuales realizar el análisis, se decidió por el campo ingenieril, plasmado a través de libros especializados en el área puesto que, además de permitirnos conocer a detalle el sentido de lo que en ellos se expone, garantizamos por medio de un estudio exhaustivo que los libros de texto son empleados por la comunidad de ingenieros civiles como herramienta teórica y práctica en sus quehaceres, lo anterior observado en la comunidad de ingenieros civiles de la Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Lo siguiente fue delimitar la investigación a través de una unidad de análisis que permitió mirar los usos y formas de la composición de funciones en un contexto de libros especializados en ingeniería. Dicha unidad de análisis se retoma del modelo de Buendía y Montiel (2012) y se traduce a este estudio (ver Figura 1).

Figura 1. Unidad de análisis de la investigación**.**



Fuente: Buendía y Montiel (2012) con señalamientos propios.

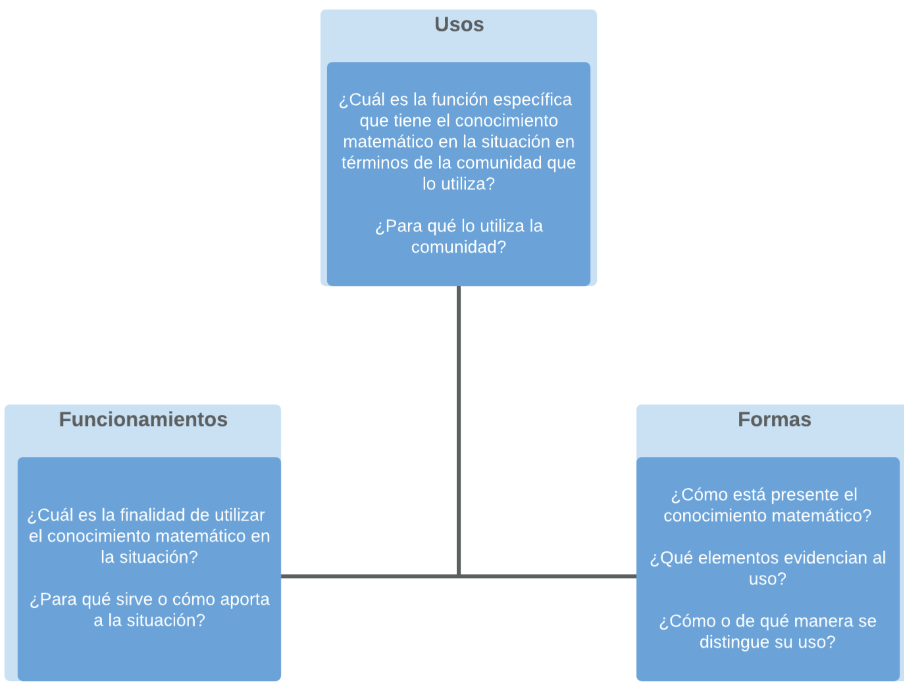
En ella, se aprecian cuatro componentes: saber matemático, actividad, transmisión del saber y escenario. El primero refiere al concepto matemático composición de funciones en sus diversas formas y significados, o bien, su naturaleza que fungirá como indicador para encontrar el uso del saber. El segundo es la actividad o bien, los quehaceres y tareas reflejados en los ejercicios o ejemplos de los libros ingenieriles. El tercero concierne a la transmisión del saber, es decir, el medio por el cual se realizará la búsqueda de los usos asociados a las actividades, en este caso, serán los libros de texto ingenieriles. Finalmente, el cuarto componente refiere al escenario donde se enmarca el análisis de los usos siendo el académico-profesional, ya que, si bien la investigación considera una comunidad en formación, la realidad es que su perfil tiene miras a lo profesional.

Al considerar estos componentes, se requirió precisar teóricamente los usos, funcionamientos y formas, mismos que nos permitirán dar cuenta de la funcionalidad del conocimiento.

Los usos del conocimiento matemático, según Cordero y Flores (2007), hacen referencia a la función específica que tiene dicho conocimiento ante una necesidad que norma el uso de una comunidad de seres humanos y que, se manifiesta por tareas (actividades, quehaceres, acciones, etc.) que componen el quehacer inmerso, es decir, es la utilidad que le da una comunidad al conocimiento en una situación específica. Al manifestarse por tareas, se pueden distinguir tipos de éstas, lo que se conoce como formas del conocimiento matemático. A la par de las formas, se entrelazan los funcionamientos del conocimiento matemático que son las esencias que perduran en las distintas situaciones de uso (Cordero y Flores, 2007).

Con el fin de orientar la búsqueda y el análisis para encontrar estos elementos en las situaciones, se propusieron cuestionamientos que permitan reconocerlos y clasificar los datos con base en dichos constructos (ver Figura 2). Esto permite recolectar de manera más objetiva la información.

Figura 2. Cuestionamientos a los que responden los usos, funcionamientos y formas.



Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, al presentarse una alternancia de tareas y generarse una nueva función orgánica que debate con las formas de los usos, este acto de "uso" se llama resignificación (Cordero 2006, citado en Cordero y Flores, 2007).

Una vez definido lo anterior, se realiza la revisión socioepistemológica de los usos, en conjunto con sus funcionamientos y formas, que caracterizan la naturaleza del saber matemático, de su aprehensión a través de significaciones contextualizadas y de su transmisión, con el fin de mirar cómo los saberes adquieren significados y usos dependiendo de estos aspectos. Es así como se formula una epistemología de prácticas y usos y que como menciona Buendía y Montiel (2012), ofrecerá una explicación acerca de la problemática y será la base para cualquier intervención didáctica.

Dicha epistemología da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático, donde lo social será entendido como la relación epistemológica entre las prácticas o usos en las que se involucra el hombre al hacer o usar matemáticas, respectivamente, y el saber matemático que se genera.

Para esta investigación, se formuló una epistemología de usos, por lo que se toma en consideración los marcos de referencia de Mendoza y Cordero (2014), Del Valle, Morales y Cordero (2015) y Giacoleti y Cordero (2019).

Se retoman aspectos como las significaciones (elementos que le dan sentido a la situación específica), los procedimientos (ejecuciones fundamentales derivadas de las significaciones), los instrumentos (lo funcional, la experiencia sobre la cual se trabaja y lo que le es útil al humano) y una breve explicación de todo lo anterior. Ello permitirá, valorar la justificación funcional que demanda la comunidad de ingeniería la cual usa la composición de funciones.

Elementos metodológicos

La investigación se basa en una metodología cualitativa de corte exploratorio y de tipo descriptivo-explicativo debido a que pretende encontrar, extraer significados, identificar y recabar información (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), en este caso, relacionado con los usos de la composición de funciones, para describir y comprender cómo se usa dicho conocimiento en determinadas actividades inmersas en los libros de texto ingenieriles y proporcionar una explicación del cómo y para qué están presentes en ellos, de manera que, posteriormente, pueda formularse una epistemología de usos en torno a dicho conocimiento matemático.

Para llevarlo a cabo, se consideró un proceso de cuatro pasos:

1. Revisión Socioepistemológica: A partir de las cuatro dimensiones del saber matemático, se generan las categorías de uso, es decir, nuevos significados asociados a la composición de funciones que nos permitan reconocerla en contextos fuera de lo matemático.
2. Selección de libros especializados en Ingeniería: Se realiza a partir del análisis de un plan de estudio y una encuesta a estudiantes, profesores y egresados de la Universidad Autónoma de Yucatán, mismo que fungió como nuestra población de estudio específica. Se seleccionan los siguientes libros:
    a. Keyser, K. (1985). Ciencia de materiales para ingeniería. México: Limusa Noriega Editores.
    b. Piralla, M. (2002). Diseño estructural. México: Limusa Noriega Editores.
    c. Thuesen, H.G. (1989). Ingeniería económica. Prentice Hall & IBD.
3. Búsqueda de los usos: Se procede a realizar la búsqueda y análisis de situaciones en las cuales se perciba un posible uso de la composición de funciones, desde una perspectiva Socioepistemológica.
4. Formulación de una epistemología de usos: Con base en la información encontrada, se propone una epistemología de usos a partir de modelos previamente realizados en investigaciones como Mendoza y Cordero (2014), Del Valle, Morales y Cordero (2015) y Giacoleti y Cordero (2019). En dicho modelo se distinguen las significaciones, procedimientos e instrumentos para la construcción del conocimiento matemático en las actividades.

Análisis de resultados

Las categorías de uso que fungieron como nuevos significados de la composición de funciones nos permitieron dar un nuevo panorama del conocimiento matemático en cuestión y, así, poder reconocerlo en contextos diferentes a lo académico (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Categorías de uso de la composición de funciones.*

CATEGORÍA DE USO	CARACTERIZACIÓN/DESCRIPCIÓN
1. Dependencia múltiple	Identificar la dependencia entre varios estados que se encuentran relacionados entre sí.
2. Cuantificación de cambios relacionados	Medir el cambio que presentan situaciones que dependen entre sí.
3. Optimización de un proceso de estados	**Simplificar un proceso que considera una o varias variables intermedias. Por ejemplo: pasar de un estado A a un estado C, sin considerar explícitamente el estado B.**

Fuente: elaboración propia.

Una vez definidas las categorías de uso, se procedió a realizar el análisis Socioepistemológico de los libros especializados en ingeniería previamente seleccionados. En ellos apreciamos elementos asociados a la composición de funciones con base en su epistemología y el contexto ingenieril en el que se desarrollan y de donde se obtuvieron tres situaciones, las cuales serán los subtítulos de las siguientes secciones.

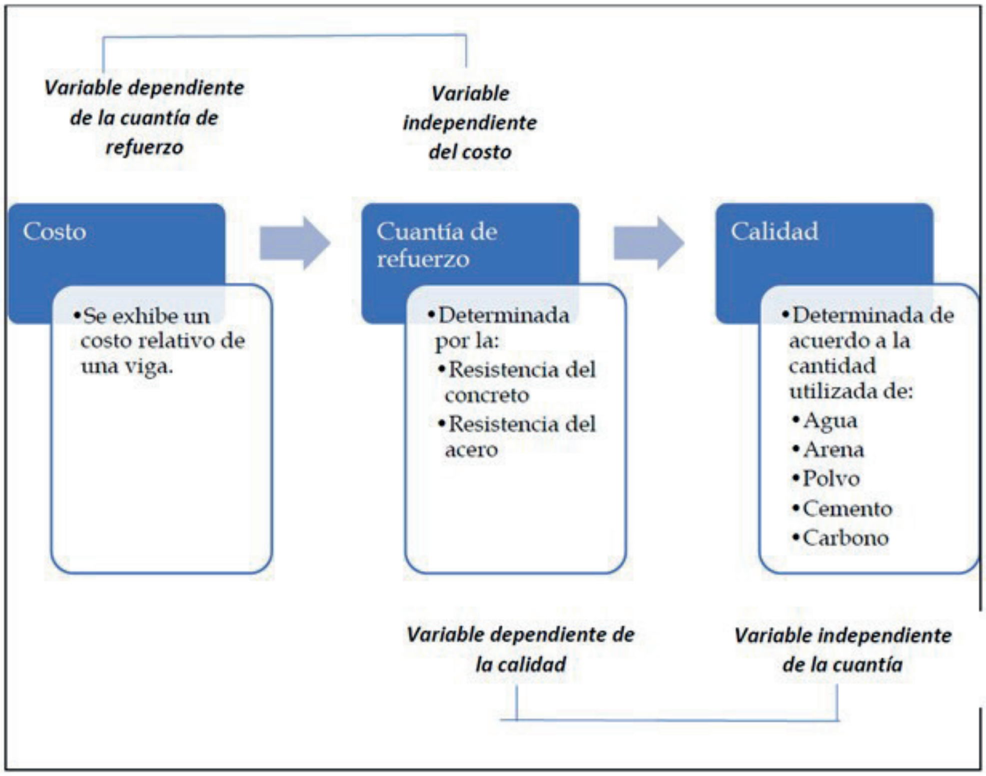
Situación 1. Selección de materiales

La situación 1, de manera general, consiste en seleccionar el mejor material y se identificó gracias a la categoría de uso “Dependencia múltiple” y “Optimización de un proceso de estados”. En ella se analizan tres variables: costo, cuantía de refuerzo y calidad, presentadas a través de gráficas cartesianas y cuyo objetivo es representar la variación del costo de un material (específicamente una viga) en función de la cuantía y la calidad del material.

La gráfica explícitamente mostraba la relación de dependencia entre el costo y la cuantía del refuerzo de un material. Sin embargo, en el contexto de la situación se mencionaba que la cuantía de refuerzo, a su vez, dependía de una tercera variable llamada calidad del material.

Por lo tanto, se analizaron las relaciones pertinentes entre dichas variables y se logró identificar un posible uso de la composición de funciones, donde existen tres variables que dependen entre ellas y donde los dominios y rangos interactúan entre si (ver Figura 3).

Figura 3. *Esquema que representa la relación de dependencia entre las tres variables.*



Fuente: elaboración propia.

Al reconocer dichos elementos, finalmente y con base en el contexto, el uso de la composición de funciones fue optimizar el valor de la variable costo (encontrar un costo ideal), el cual depende de la cuantía de refuerzo (qué resistencia se desea del material y de qué tipo: acero o concreto) y ésta, dependerá de la calidad con la que esté hecho el material (niveles de agua, arena, polvo, cemento).

Situación 2. Elevación de temperaturas en materiales

La situación 2 consiste en analizar cómo se modifica un material o sus propiedades y se identificó gracias a la categoría de uso "dependencia múltiple" y "cuantificación de cambios relacionados". En ella se analizan tres variables: tiempo, deformación y esfuerzo, las cuales se encuentran representadas a través de dos gráficas, en una gráfica se encuentra representada la deformación que depende del tiempo, y en otra gráfica está representado es esfuerzo que depende de la deformación.

Las gráficas mostraban la relación de dependencia entre estas variables ya que el rango de valores de la variable intermedia (deformación) tenía la función de ser el dominio de la tercera variable (esfuerzo). Entonces hay una conexión de tres variables cuyos dominios y rangos están relacionados. A partir de estas relaciones, se determinó que está presente la composición de funciones, cuyo uso específico es cuantificar el cambio que sufre el esfuerzo, a partir de considerar la deformación y ésta, a su vez, considerar el tiempo.

Situación 3. Intereses compuestos

La situación 3 consiste en analizar y calcular ciertos tipos de intereses (específicamente intereses compuestos) que intervienen en el área económica de la Ingeniería.

Se identificó gracias a la categoría de uso "Optimización de un proceso de estados". En la situación se presenta una tabla en la cual se desglosa el procedimiento a realizar para obtener un tipo de interés. Dicho interés está dado por la fórmula matemática: $P(1+i)^n$ en donde P es la cantidad monetaria prestada, i es la tasa de interés y n es la cantidad de años por el cual se acordó el préstamo.

La tabla mostraba el proceso que había que realizar y resolver para encontrar la cantidad final que había que pagar, para 1 año, 2 años, 3 años, etc. Es así, como la fórmula $P(1+i)^n$ permitió sintetizar todo ese procedimiento. Para mirar más clara la relación entre cada proceso hasta llegar a la fórmula "general" que determina la cantidad final, se realizó un esquema en la que, las columnas representan el proceso a realizar para n=1 año, n=2 años, n=3 años y para n.

De manera horizontal (por filas), la primera fila representa la fórmula que hay que aplicar, la segunda fila se sustituye la variable i por la x, la tercera fila se reconoce a la expresión $1+x$ como una función $f(x)$ y finalmente en la cuarta fila se reconoce a toda la expresión como una composición de dos funciones (ver Figura 4).

Figura 4. *Esquema que muestra el procedimiento para realizar el cálculo de un interés como una función compuesta*

$P(1+i)$	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^n$
$P(1+x)$	$P(1+x)^2$	$P(1+x)^3$	$P(1+x)^n$
$P[f(x)]$	$P[f(x)]^2$	$P[f(x)]^3$	$P[f(x)]^n$
$g[f(x)]$	$g[f(x)]$	$g[f(x)]$	$g[f(x)]$

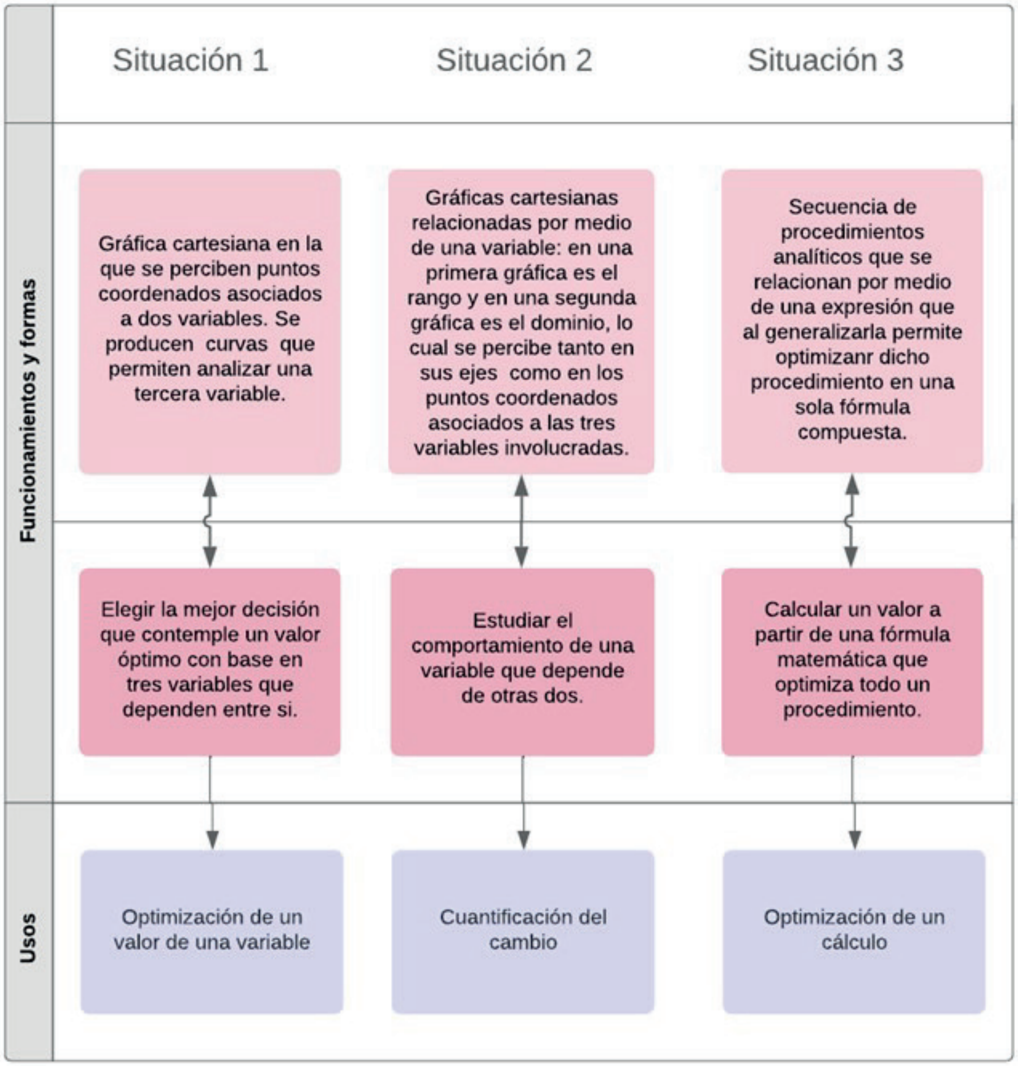
Donde: $i = x$, $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = x^n$

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, con la función compuesta reconocida, establecimos que el uso de la composición de funciones en esta situación es como una herramienta que permite optimizar un proceso de cálculo de intereses, es decir, en lugar de realizar los cálculos por cada año, se recurre a la fórmula $P(1+i)^n$ que inmediatamente podrá dar el resultado esperado.

Con base en las tres situaciones encontradas, se estableció el uso, funcionamientos y formas de la composición de funciones para cada contexto (ver Figura 5).

Figura 5. *Usos, funcionamientos y formas evidenciados en las situaciones.*



Fuente: elaboración propia.

En la primera fila se señalan las *formas* encontradas para las tres situaciones, esto es, las diferentes maneras en las que pudo emerger el uso. De manera general, se percibe que es la consideración de relaciones de dependencia entre variables, los puntos y ejes coordenados dentro de las gráficas (elementos clave dentro de los contextos), las fórmulas matemáticas y el cambio de dominios y rangos, lo que permitió evidenciar el *uso*.

Los *funcionamientos* (segunda fila) de la *composición de funciones* consisten en expresar relaciones de dependencia entre al menos tres variables, el estudio de los comportamientos de éstas, el análisis de dichas relaciones y el cálculo de un valor a partir de una fórmula matemática.

Al interactuar las *formas* con sus respectivos *usos*, dieron pie a los usos específicos: la optimización de valores y cálculos y la cuantificación de un cambio, todos asociados a las categorías de uso que fueron las que nos permitieron identificarlas y, con apoyo en el contexto, especificarlas.

Epistemología de usos

Con la evidencia presentada, se formuló una epistemología de usos (ver Tabla 2) que, como anteriormente se mencionó, explica los usos del conocimiento matemático en cuestión y será un marco de referencia basado en contextos específicos de la ingeniería civil, para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la *composición de funciones*.

Tabla 2. *Epistemología de usos de la composición de funciones.*

	SITUACIONES		
	Situación 2	Situación 1	Situación 3
Significaciones	Minimizar el valor de una variable con base en otras dos.	Cuantificar valores específicos en la relación de tres variables	Reducir un procedimiento extenso a una fórmula matemática
Procedimientos	Graficación Variación de magnitudes	Graficación Selección de cantidades de interés	Repetición de expresiones matemáticas
Instrumento	Seleccionar el que esté más próximo al ideal, es decir, lo estable (Cordero, 2015).	Cantidades seleccionadas con respecto a una variable.	Expresión matemática

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2, se puede apreciar que la situación 1 de *selección de materiales* se generan significados cuando en ella interfiere un instrumento llamado *lo estable* ya que se busca que esa selección tienda hacia un ideal provocando la minimización de costos a través de la graficación y la variación de magnitudes de las variables. En la situación 2 de *elevación de temperaturas en materiales* se generan significados cuando en ella interviene un instrumento relacionado con cantidades de interés y provoca la relación de tres variables inmersas para determinarlos. Lo anterior a partir de la graficación e identificación de puntos de interés. Y, por último, en la situación 3 de *intereses compuestos* se generan argumentaciones cuando en ella interviene un instrumento relacionado con una expresión matemática compuesta ya que ésta permite agilizar el cálculo de un valor provocando la reducción de un procedimiento a través de distinguir la repetición y relación de expresiones matemáticas en todo el cálculo.

Reconocer los usos desde el contexto de la ingeniería civil nos permitió mirar cómo la matemática se resignifica en escenarios contextualizados en donde se considera al ingeniero en la escuela y en su quehacer (profesional), y lo hace ubicarse en contextos específicos donde hace uso de la composición de funciones de manera casi natural y que, como investigadores, reconocemos todos esos elementos que hacen posible que la matemática tenga sentido y hacerla sobresalir, al permitir enfocarla en sus usos.

Consideraciones finales

Asociar las situaciones de uso como un panorama en el que el ingeniero utiliza la matemática como herramienta de trabajo y le permite analizar y dar solución a sus problemas genera una nueva perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en donde reconocemos la funcionalidad del conocimiento matemático en cuestión:

- Situaciones donde se cuantifican cambios.
- Situaciones de optimización ya que permite minimizar costos o evitar la realización de todo un procedimiento para recurrir a fórmulas matemáticas compuestas.

A partir de los resultados, se crea un marco de referencia que ofrece nuevas perspectivas del conocimiento matemático desde el punto de vista didáctico, social epistemológico y cognitivo, nuevos significados (Como dependencia múltiple, como cuantificación de cambios relacionados y como optimización de un proceso de estados), contextos de uso, relación entre otros conceptos matemáticos (puesto que en los usos que evidenciamos se encontró conexión con otra matemática), entre otras cosas.

Además, las categorías de uso pueden ser la base para iniciar otros estudios en áreas diferentes al ámbito de la ingeniería puesto que permite encontrar situaciones con características asociadas al uso de la composición de funciones fuera de un contexto matemático.

Desde un punto de vista más didáctico, también se aprecia un panorama para que el docente en matemáticas obtenga claridad sobre el concepto en el aula, al ampliar su y ofrecerle al estudiante nuevas formas de ver una matemática como, por ejemplo: trabajar con variables, mostrar la dependencia entre variables, cómo se relacionan unas con otras, etc.

Referencias

Buendía, G. y Montiel, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y* Reflexiones (61-88). México: Lectorum.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(1), 103-128.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, 10(1), 7-38.

De la Cruz, A., Solís, M. y Hernández, H. (2016). La modelación-graficación practicada desde la comunidad de ingenieros civiles en formación: el caso del fenómeno de infiltración. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(1), 126-135.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Engelke, N. (2007). Students' understanding of related rates problems in calculus. Arizona, State University. Estados Unidos.

Giacoleti, F. y Cordero, F. (2019). Usos y significados de la transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa, 32*(2), 429-438.

Hassani, S. (1998). *Calculus students' knowledge of the composition of functions and the chain rule*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Normal.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill: México.

Keyser, K. (1985). *Ciencia de Materiales para Ingeniería.* México: Limusa Noriega Editores.

Larson, L. y Hostetler, R. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. México: McGraw-Hill.

Meel, D. (1999). Prospective teachers' understandings: Function and composite function.
Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal.
1, 1-12.

Mendoza, J. y Cordero, F. (2014). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 1557-1563.

Mendoza, J., Cordero, F., Solís, M. y Gómez, K. (2018). El uso del conocimiento matemático en las comunidades de Ingenieros. Del objeto a la funcionalidad matemática. *Bolema*, 32(62), 1219-1243.

Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1018-1026.

Thuesen, H. G. (1989). Ingeniería Económica. Prentice Hall & IBD.

Tuyub, I. (2010). Un papel de la función matemática en la práctica toxicológica. *Abstraction y Aplication*, 3, 21-34.

Valdivia, C., Domínguez, C. y Parraguez, M. (2015). Un modelo cognitivo para mejorar el aprendizaje de la composición de funciones. Universidad Austral de Chile.

Valdivia, Cristóbal; Parraguez, Marcela (2013). Una descomposición de la regla de la cadena: un modelo cognitivo para la construcción del concepto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 825-834.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 145-175.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

¿CÓMO DISEÑAR PREGUNTAS Y TAREAS PARA EVALUAR ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN NIÑOS? UNA PROPUESTA INCLUYENDO EVIDENCIAS DE VALIDEZ DE CONTENIDO

HOW TO DESIGN QUESTIONS AND TASKS TO EVALUATE STATISTICS AND PROBABILITY IN CHILDREN? A PROPOSAL INCLUDING EVIDENCE OF VALIDITY OF CONTENT

Jazmine Escobar-Pérez, Aura Nidia Herrera
Universidad Nacional de Colombia (Colombia)
jaescobarpe@unal.edu.co, anherrerar@unal.edu.co

Resumen

Uno de los retos de la formación estadística en niños es evaluarla formativamente para obtener información que ayude al maestro en su trabajo de aula. El presente artículo corresponde a la adaptación de un taller impartido en la RELME 34. El propósito es enseñar a diseñar preguntas y tareas de evaluación formativa en estadística y probabilidad para niños de básica primaria. Además, se aprenderá a realizar una red nomológica y un juicio de expertos como evidencia de validez de contenido. La metodología se centra en la construcción activa para adquirir no sólo las habilidades, sino también una perspectiva crítica sobre las implicaciones de la construcción de instrumentos de evaluación. Estas pautas están pensadas tanto para el trabajo en clase como para evaluaciones de tipo sumativo, y se puede aplicar también a instrumentos diseñados para hacer investigación. Se incluyen preguntas y tablas que facilitarán el proceso.

Palabras clave: diseño de preguntas, estadística y probabilidad, evaluación.

Abstract

One of the challenges of statistical training in children is to evaluate it formatively to obtain information that helps the teacher in his work in the classroom. This article corresponds to the adaptation of a workshop given at RELME 34. The purpose is to teach how to design questions and tasks for formative evaluation in statistics and probability for children in elementary school. In addition, you will learn to make a nomological network and an expert judgment as evidence of content validity. The methodology focuses on active construction to acquire not only the skills, but also a critical perspective on the implications of constructing assessment instruments. These guidelines are designed for both class work and summative assessments and can also be applied to instruments designed for research. Questions and tables are included to facilitate the process.

Keywords: question design, statistics and probability, evaluation.

Introducción

La educación en estadística y probabilidad ha sido incluida en el currículo de la mayoría de los países latinoamericanos como un área de formación desde los primeros años de la educación básica, pues participar en la sociedad de la información requiere de ciudadanos con capacidad para leer, interpretar, analizar y argumentar críticamente los datos que se trasmiten a través de los medios de comunicación (Batanero, 2013); es decir, de ciudadanos comprometidos y reflexivos. Además, el conocimiento estadístico es fundamental en el contexto académico, pues se utiliza en gran cantidad de disciplinas, tanto para la construcción de conocimiento como para su validación y divulgación (Batanero, 2002).

Incluir estos contenidos en el currículo presenta varios desafíos, dentro de los cuales se encuentra su evaluación. La evaluación juega un papel central en los procesos de enseñanza aprendizaje, pues aporta información relevante tanto para el trabajo en clase como para la planeación del microcurrículo. En efecto, no se evalúa únicamente con el propósito de conocer, como en la ciencia básica, sino para saber cómo intervenir e impactar directamente el trabajo cotidiano en el aula. Para ello es fundamental que la evaluación tenga un valor formativo, que se caracteriza principalmente por permitir tomar medidas de carácter inmediato, por tener la intención explícita de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y por evaluar procesos a lo largo del tiempo. Además, del carácter formativo, la evaluación puede ser sumativa, que se caracteriza por tomar medidas a mediano y largo plazo para identificar el grado en el que se han alcanzado los objetivos de aprendizaje al final de un proceso (Casanova, 1998; Bayer, Klieme y Jude, 2016).

La evaluación formativa en educación tiene como propósito fundamental ir mejorando las prácticas educativas. Es por esto que el maestro de aula requiere tener los elementos para poder evaluar y obtener información pertinente que le permita ajustar el trabajo de clase a las necesidades de sus alumnos. Por su parte, la enseñanza y aprendizaje de la estadística implica retos particulares, como la necesidad de conocimientos previos que se requieren para su aprendizaje. Por esto, además de la evaluación en el proceso de enseñanza – aprendizaje, una evaluación de entrada daría mucha información al maestro para el trabajo en clase.

El presente artículo tiene como objetivo describir las fases que forman parte del proceso de formulación de ítems y tareas de manera práctica, ya que proviene del taller con su mismo nombre que se trabajó durante la RELME 34. Se presenta el proceso para el diseño de preguntas y tareas incluyendo la prueba piloto, al final se realiza una breve aproximación a la forma de estimar la evidencia de validez relacionada con el contenido de las preguntas o tareas diseñadas. En el apéndice se presenta una lista de chequeo para el proceso.

Proceso de diseño de preguntas y tareas

La construcción de una prueba va mucho más allá de la formulación de preguntas y tareas, que es sólo uno de sus apartados. El proceso inicia con identificar el **para qué**: cuál es el objetivo de la evaluación o el propósito de los ítems o tareas. Puede haber muchos objetivos, entre los que los cuales se pueden encontrar la coherencia con los lineamientos curriculares, la evaluación formativa, la enseñanza para el aprendizaje (en la que se obtiene información del progreso individual) y recolectar información para una investigación.

Después de tener claro el propósito de la evaluación, se debe definir **qué se quiere medir**, es decir, ¿cuál es el dominio conceptual? Tener la definición clara ahorrará mucho tiempo y esfuerzo. Contar con la definición y el análisis del dominio de conocimiento, habilidades u otros atributos de interés permite tener a su vez indicadores específicos que guiarán el diseño de las preguntas y las tareas.

Otro aspecto fundamental en esta etapa es tener claro **para qué se van a utilizar las puntuaciones de la prueba**, porque de ello depende la aproximación que se va a tener (general o específica). Por ejemplo, en el caso en que solo se quiera saber si los estudiantes pueden calcular la probabilidad clásica con un dado es suficiente con que desarrollen ejercicios que la aborden. Sin embargo, si se quiere saber en qué parte del proceso hay dificultades, se debe medir de forma más específica, incluyendo preguntas en las que los estudiantes identifiquen el número de casos posibles o su equiprobabilidad.

Igualmente, resulta valioso conocer **cómo ha sido abordado el constructo previamente**. Para esto se revisan los antecedentes teóricos y empíricos, y se pueden incluir también la revisión de literatura de constructos relacionados y consultar a expertos en el tema (aproximaciones inductivas).

Algunas pautas que facilitan el proceso de definir el constructo o la habilidad son (Cronbach, 1989; Shultz y Whitney, 2005):

1. Identificar el dominio conceptual, Especificar sobre quién es la medición (estudiantes individuales, grupos, instituciones). Identificar cuál es la propiedad general del constructo: se medirán aptitudes, conocimientos, actitudes, etc.
2. Especificar el dominio conceptual, describir de forma suficiente las características de aquello que se va a medir, tiene una sola dimensión o es multidimensional, por ejemplo, si se va a medir comprensión de la probabilidad, podrían tenerse tres dimensiones: probabilidad subjetiva, probabilidad clásica o probabilidad frecuentista, al tener varias dimensiones se debe identificar cómo se relacionan entre sí y cómo se diferencian conceptualmente.
3. Definir el constructo de forma clara (sin ambigüedad) y concisa, pero no demasiado técnica, debido que el uso excesivo de términos técnicos dentro de una definición hace que ésta se vuelva demasiado estrecha. La definición se debe hacer de forma positiva no negativa (definir por lo que no es). Además, no utilizar definiciones circulares o autoreferenciales.

Tabla 1. *Identificación del Constructo a Medir*

	Preguntas & Respuestas	
	¿Qué voy a medir?	
	¿Qué propiedades del constructo o va a incluir la medición? Especificar el constructo en términos inequívocos coherentemente con la teoría en la que se basa.	
	¿Qué diferencias y similitudes tiene con otros constructos o habilidades relacionadas?	
	¿A quienes voy a evaluar? ¿Cuáles son sus características(edad, grado, contexto?	

Fuente: elaboración propia.

Una metodología que es muy útil para estructurar la definición de lo que se va a medir es la red nomológica que incluye el objeto de la medida dentro de una base teórica y de relaciones los que permite aclarar aspectos conceptuales y teóricos, al igual que la posibilidad de procedimientos de validación posteriores.

Red nomológica

Consiste en un sistema interconectado de relaciones esperadas entre constructos estas relaciones tienen soporte empírico o teórico, de hecho, evidencia la teoría en donde se circunscribe el constructo, esta red también relaciona propiedades observables o sus cuantificaciones Cronbach (1955, 1989). La red nomológica va creciendo a medida que se investiga y conoce más acerca del constructo, por tanto está en constante evolución. Cuando un constructo es joven la red nomológica tiene pocas conexiones (Nivel exploratorio) y se va nutriendo permanentemente con los avances teóricos o empíricos.

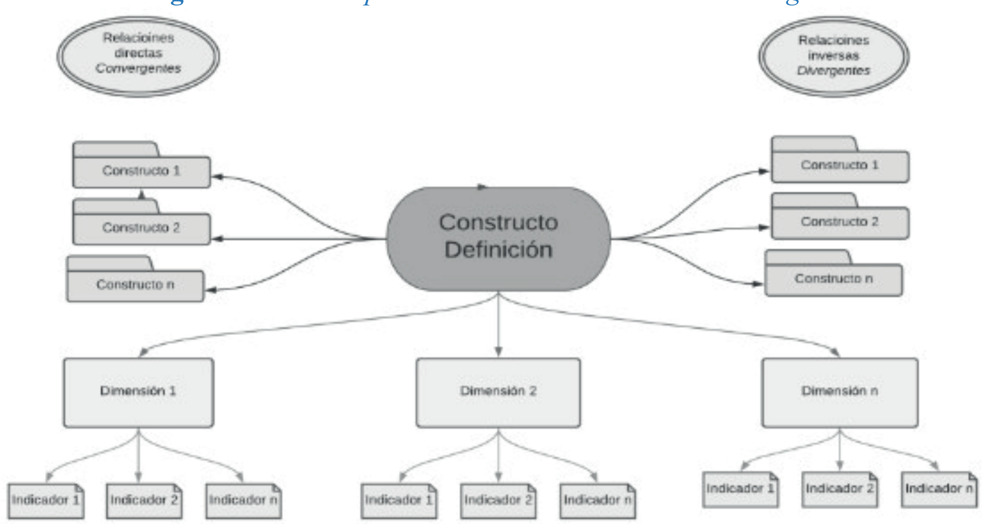
Para realizar una red nomológica, se selecciona la teoría que sustenta la medición y se relacionan a) Propiedades o cantidades observables unas con otras, b) Constructos teóricos con observaciones y c) Constructos teóricos con otros constructos.

La red nomológica tiene varios elementos:

0. El punto de partida y el corazón de la red nomológica es la definición de lo que se va a medir.
1. ***Constructos con relaciones directas***: Convergencia. Por ejemplo, identificar si la probabilidad de un evento es mayor que la de otro tendría una relación directa con la identificación *de mayor qué* y de *menor qué* en números o conjuntos.
2. ***Constructos con relaciones Inversas:*** Divergencia. Ejemplo, Obtener información de las tablas estadísticas y la actitud negativa hacia los números.
3. ***Constructos sin relación:*** Independencia. Ejemplo, pensamiento estadístico y habilidad motora gruesa.
4. ***Indicadores.*** Observables, susceptibles de ser medidos. Espinoza (2019). Ejemplo, si se está midiendo la capacidad de predecir la probabilidad de ocurrencia de eventos, uno de sus indicadores sería que los niños pueden identificar si un evento (de su contexto) es posible, imposible o seguro.

A continuación se incluye una plantilla para construir una red nomológica. El objetivo es completarla con la información sobre el constructo que va a medir (Utilizar insumos de la tabla 1). Como se mencionó anteriormente al inicio pueden ser muy pocas las relaciones pero, es adecuado realizarla e ir incrementándola con el tiempo, por ejemplo si siempre se trabaja con la misma asignatura y se evalúan los mismos contenidos, o contenidos similares que se van actualizando.

Figura 1. *Plantilla para Realización de una Red Nomológica*



Fuente: elaboración propia.

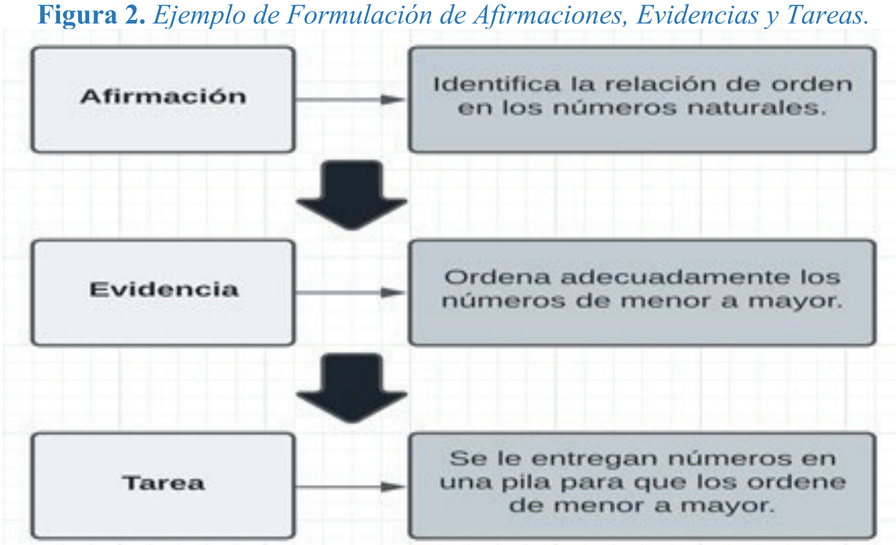
No todas las mediciones tienen como base una red nomológica, algunas parten de estándares o lineamientos curriculares, cuando este es el caso, se debe tener en cuenta, cómo se relacionan horizontal y verticalmente, e incluso cómo se relacionan con los contenidos de otras asignaturas.

Una vez teniendo el propósito de la medición, la definición de lo que se va a medir y las relaciones de este con otros constructos e indicadores, se pueden formular las preguntas o las tareas. Para ello se debe inicialmente definir un plan de prueba en el que se estipula cuántas preguntas o tareas se van a realizar y de qué temas (con el objetivo de cubrir todos los temas previstos) posteriormente se sigue con la formulación propiamente dicha. Algunos pasos que pueden orientar esta fase del proceso son:

- Tener clara la población a la que está dirigida la prueba, un aspecto de relevancia es la etapa de desarrollo y el nivel educativo, pues esto guiará el vocabulario que se va a utilizar y la longitud de la prueba. Para profundizar estos aspectos ver Muñiz y Fonseca-Pedrero (2019)
- Formulación de los ítems, siguiendo el plan de prueba. Para esta etapa del proceso se tomará una parte del modelo basado en la evidencia. El aspecto central del que se parte es responder a la pregunta ¿qué se quiere afirmar sobre los evaluados?, ¿qué saben?, ¿qué tipo de problemas son capaces de resolver?, ¿comprenden la diferencia entre dos conceptos particulares? Esto se hace en forma de afirmaciones y se debe justificar por qué la evaluación permite hacer esas afirmaciones. ¿Qué respuesta debe dar el examinado a las preguntas o a las tareas que permitan hacer esas afirmaciones? Las afirmaciones pueden ser muy generales, por ejemplo: el estudiante puede construir un pictograma o, muy específicas como: el estudiante puede identificar *igual qué* y *diferente de*, en una serie de figuras.

Después de especificar las afirmaciones que se quieren realizar con base en la medición, se deben identificar cuáles son las evidencias que se requieren para respaldar las afirmaciones realizadas y una vez teniendo claras las evidencias, se formulan las tareas o preguntas que puedan recoger esas evidencias y finalmente se definen indicadores para puntuar las tareas y cómo se sumarán esos puntajes. Al finalizar se tendrá entonces un vínculo lógico entre lo que se quiere decir sobre los evaluados y la evaluación. El diseño basado en la evidencia, entonces, ofrece la posibilidad de tener un argumento basado en la evidencia sobre una evaluación y guía el cómo se recoge e interpreta la información (Mislevy, 2017).

Figura 2. *Ejemplo de Formulación de Afirmaciones, Evidencias y Tareas.*



Fuente: elaboración propia.

Las afirmaciones que se realizan pueden basarse en diferentes modelos. En el caso de basarse en un modelo de competencias se podrían hacer afirmaciones del tipo: Mis estudiantes estarán *en capacidad de* y se podrían utilizar verbos concretos (calcular, definir, identificar, resolver, crear, argumentar) o generales (comprender, saber…). De todas formas, cada afirmación debe tener sus evidencias específicas y sus respectivas preguntas o tareas.

Además del modelo tradicional basado en la evidencia Arieli-Attali et al. (2019) propusieron una extensión que incluye aspectos relevantes del aprendizaje y lo articula con el marco de la evaluación, para profundizar en la relación aprendizaje-evaluación revisar el artículo mencionado.

Formulación de las preguntas y tareas

Después de tener identificadas las tareas o preguntas que se requieren para proveer la evidencia, se debe construir el plan de prueba en el que se incluye el número de preguntas o tareas así como su distribución en los temas ¿se van a tener más tareas de un tema particular por ser este más importante? ¿todos los temas contarán con el mismo número de tareas? Por ejemplo, si un profesor observa dificultades en un área específica puede hacer un instrumento que privilegie esa área para obtener suficiente información, para adaptar el proceso de enseñanza aprendizaje. El plan de prueba se puede especificar en una tabla, dentro de ésta se puede incluir también el tipo de preguntas o tareas. Realizar un plan de prueba guiará el proceso de construcción y ayudará a la representatividad del contenido de la prueba, además evita que se creen muchas preguntas o tareas de un tipo y muy pocas de otros, en este último caso quedarían subrepresentadas. El número de ítems para cada área dependerá de los objetivos o importancia relativa de las áreas. Muñiz y Fonseca-Pedrero (2019) recomiendan inicialmente formular el doble de preguntas que se tendrán al final, dado que después de evaluarlas se puedes descartar bastantes. Además, se puede tener redundancia, es decir, redactar varias preguntas con el mismo objetivo y palabras, términos o redacción diferentes, luego al hacer el pilotaje y escoger las mejores.

Cuando ya se cuenta con el plan de prueba se inicia la formulación de las preguntas con base en él. Para formular las preguntas se debe seleccionar el formato que permita evaluar adecuadamente el tema seleccionado. Se pueden construir preguntas de falso y verdadero, de construcción de respuesta (preguntas abiertas, solución de problemas con enunciados verbales), de selección múltiple con única o con múltiple respuesta. Para las preguntas de construcción se requiere contar con indicadores de clasificación o rúbricas en el caso que tengan mayor complejidad. De todas formas, independientemente del formato que se seleccione el proceso de realización de las preguntas y las tareas tienen características similares:

Se puede iniciar con una lluvia de preguntas o tareas, siguiendo el plan de prueba, pero sin evaluar la calidad inicial de éstas, luego de esta primera versión, se hace un análisis crítico de cada pregunta o tarea, para guiar este análisis se pueden hacer varias preguntas: ¿la tarea captura la intención de la medición?, es decir, es una evidencia de la afirmación que se ha hecho? ¿La tarea es clara? ¿es relevante o se están preguntando cosas irrelevantes? También se tiene que tener en cuenta las características de una buena pregunta o una buena tarea:

- ✓ Sin ambigüedad.
- ✓ Adecuadas características semánticas y sintácticas, los ítems deben ser claros, es recomendable hacer una aplicación de prueba con algunos estudiantes para observar si los ítems se comprenden y ajustarlos en caso de que no sea así.
- ✓ Longitud y lenguaje adecuados a las características de la población, en este caso las preguntas deben tener poca longitud y la redacción de las tareas deben ser muy cercanas al contexto de los niños.

Otro aspecto a tener en cuenta para la redacción de las preguntas o tareas es que se puede seguir un modelo que ayude a su redacción. Por ejemplo, Watson y Thompson (2015) propusieron niveles de especificidad de la tareas que se presentan la tabla 2 en las que se clasifican diferentes acciones para el trabajo matemático según el nivel de especificidad que va desde acciones básicas como calcular hasta conexiones interdisciplinarias como relacionar el conocimiento con otras asignaturas.

Tabla 2. *Acciones para Diferentes Niveles de Especificidad del Trabajo Matemático.*

	Ejemplos de acciones específicas
Acciones básicas	Calcular, hacer procedimientos, expresar hechos.
Transformador	Organización, reordenación, sistematización, visualización, representación.
Resolución de problemas	Conjeturar, suponer, simbolizar, modelar, predecir, explicar, verificar, justificar, refutar, probar casos especiales.
Conexiones interdisciplinares	Incorporar otras epistemologías, identificar variables y estructuras, reconocer similitudes, comparar conocimiento familiar y desconocido.

Fuente: Tomada y adaptada de Watson y Thompson (2015).

Actualmente como efecto de la pandemia se ha generalizado el uso de los computadores como mediadores tanto para el proceso de enseñanza aprendizaje como para la medición. Para profundizar sobre diseño de ítems computalizados consultar Sireci y Zenisky, (2016) y Drasgow, (2016), para profundizar en el diseño de ítems de respuesta múltiple consultar Haladyna, y Rodríguez, (2013) y para el caso de respuesta construida o abierta Hogan y Murphy (2007) y para diseño de tareas Watson y Ohtani (2015).

Un aspecto relevante para el diseño de las preguntas o tareas es verificar si son adecuadas para la edad de los niños y sus características particulares. Por ejemplo, si hay niños con hipertonicidad se requiere darles más tiempo, o si es posible hacer las preguntas de forma oral como en el caso de niños con discapacidad visual. En todo caso, se deben adecuar tanto las preguntas y las tareas como su formato, según las necesidades de la población a la que van dirigidos. En este mismo sentido, se deben tener siempre presentes cuáles son las características de la población objetivo, cuál es su nivel de desarrollo, cuáles son sus habilidades cognitivas y motoras, tener claras estas características orientan la construcción de los ítems y tareas, además de facilitar las posibles adaptaciones que se requieran. Para profundizar este aspecto ver Dorans y Cook (2016).

Evidencia relacionada con el contenido de la prueba

Una vez se tengan las preguntas o tareas diseñadas el siguiente paso es iniciar el proceso de validación, que actualmente privilegia las inferencias que se hacen sobre los puntajes de las pruebas, para los usos previstos y no a la prueba en si misma (APA, 2014). Por ejemplo, Si se requiere saber si los niños manejan cuatro operaciones básicas (suma resta, multiplicación y división) para que ingresen a un programa de early algebra y en la prueba que se hacer únicamente hay tareas de suma y multiplicación, no se puede inferir que los niños manejan las cuatro operaciones. Justo en el ejemplo descrito hay un problema con las evidencias relacionadas con el contenido de la prueba que son las que se abordaran a continuación.

Validez relacionada con el contenido de la prueba

Es la primera evidencia de validez que debe establecerse y se refiere a la medida en la que el contenido de la prueba representa el contenido del dominio del constructo que se está midiendo. Además incluye también su relevancia, lo que permite la interpretación del puntaje de la prueba (APA, 2014). Esta evidencia se estima principalmente mediante un juicio de expertos que corresponde a una reunión de personas que se consideran en expertos en el tema (ya sea por su experiencia o por su formación académica). Los expertos evalúan las preguntas y las tareas de la prueba en términos de (Sireci y Faulkner-Bond, 2014):

- La definición del dominio: Congruencia de la definición.
- Representación del dominio: El grado en el que la prueba representa el dominio como fue definido en las especificaciones.
- Relevancia del dominio: El grado en que las peguntas no incluyen aspectos irrelevantes, trivialidad y sesgo.
- Claridad: El grado en el que se comprenden las instrucciones, las preguntas y las tareas.

En el juicio de expertos se pueden incluir otros aspectos que se consideran importantes para la evaluación particular que se está llevando a cabo, como la alineación con los estándares o con el currículo, para profundizar en estos procedimientos revisar Davis-Becker y Buckendahl (2013). Además, los jueces evalúan también las instrucciones y el formato para las preguntas o las tareas. Para que los jueces puedan realizar su labor de forma idónea debe proporcionárseles suficiente información, incluyendo la red nomológica o la teoría que sustenta la medición, e información específica sobre cuál va a ser el uso que se le dará a los puntajes y las característica de la población.

Para llevar a cabo el juicio de expertos se puede utilizar una planilla en la que se registran las calificaciones de los ítems y las tareas, estas planillas serán el insumo para un análisis posterior de la calidad de los ítem y la consistencia entre los jueces.

Figura 3. *Planilla para Registrar las Calificaciones de los Jueces.*

DIMENSIÓN	ITEM	SUFICIENCIA*	COHERENCIA	RELEVANCIA	CLARIDAD	OBSERVACIONES
X1						
X2						
X3						

Fuente: Tomada de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008).

Junto a esta planilla se encuentra una rúbrica para calificar cada uno de los indicadores en una escala de uno a cuatro, ver (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008). Si es necesario se les puede dar a los jueces una breve capacitación sobre su uso.

Una vez se cuente con las planillas diligenciadas por los jueces se procede inicialmente a realizar una análisis cualitativo de sus observaciones y de los ajustes propuestos. Luego, en una base de datos se consignan las calificaciones para hacer un análisis estadístico. Inicialmente se realiza un análisis descriptico de las puntuaciones de cada ítem, incluyendo su puntaje mínimo, máximo, su promedio y desviación, esto brindará información sobre las preguntas y tareas que requieran ajustes. Finalmente, se realiza una estimación del grado de acuerdo entre los jueces. Este se puede estimar con diferentes coeficientes, sin embargo uno de los más usados es el coeficiente de Aiken ver Aiken(1985) para aplicarlo y si se quiere ser mucho más preciso revisar Soto y Livia-Segovia (2022),para calcular sus intervalos de confianza (asimétricos).

Aplicación piloto de los ítems y las tareas.

Antes de la aplicación piloto se debe contar con las fotocopias, cuadernillos claros, legibles y bien editados tener especial cuidado con la fuente con la que se editen de modo que en especial los números sean fácilmente identificables, o que los materiales sean atractivos y que se diferencien fácilmente unos de otros, cuando esta característica sea relevante. Por ejemplo, cuando se tienen que agrupar en conjuntos.

El estudio piloto corresponde a una aplicación de las preguntas o las tareas a una muestra pequeña que pertenezca a la población a la que va dirigida la prueba. Tiene el propósito de identificar y ajustar los posibles errores que tenga el instrumento. Además, permite verificar como está funcionando. En el caso de preguntas y tareas para evaluación en el aula, este estudio debe hacerse con pocos niños y niñas del curso o cursos de interés. Igualmente, si el diseño tiene un objetivo investigativo con una población más grande, en el estudio piloto se deben incluir personas que representen las características de dicha población, por ejemplo, diferentes edades, zonas rural y urbana, colegios públicos y privados. Luego de esta aplicación y del ajuste de posibles errores encontrados en las preguntas, en las tareas, en las instrucciones o en los materiales, se puede proceder a aplicar a la muestra total.

Algunas reflexiones finales.

La evaluación de los aprendizajes provee información valiosa tanto para el maestro como para el estudiante. Para el maestro la información le permite ajustar el proceso de enseñanza aprendizaje, sus resultados le informan qué elementos se han aprendido y cuáles están en proceso de adquirirse. Para el estudiante, implica una retroalimentación de su proceso para poder ser un agente activo en su propio aprendizaje.

Un aspecto fundamental de la evaluación es la relación directa de ésta con los objetivos de aprendizaje y el uso que se le va a dar a los puntajes obtenidos. Se debe destacar la importancia de disminuir la brecha entre lo que se enseña, lo que se evalúa y lo que los niños viven en su contexto.Otros aspectos a tener en cuenta, desde que se inicia la construcción de los ítems o tareas, es prestar atención a la subrepresentación del contenido, es decir, que hagan falta aspectos fundamentales para la medición. Una buena definición embebida en una red nomológica ayuda a evitar esta dificultad. También debe prestarse especial atención a la relevancia al no incluir medición de variables que estén fuera del objetivo. Por ejemplo, formular preguntas con "cáscaras" o "trampas" porque se estaría evaluando la capacidad de los niños para identificar dichas cáscaras y no su pensamiento estadístico o sus habilidades para identificar probabilidades.

Por otro lado, las evidencias relacionadas con el contenido son necesarias, pero no suficientes, posteriormente se deben incluir evidencias basadas en la relación con otras variables, con la estructura de la prueba y con el proceso de respuesta, pero estos temas van más allá del objetivo de este escrito.

El proceso descrito no se enmarca en ningún modelo específico de aprendizaje. Sin embargo, se hace necesario, como se planteó en el primer apartado, que los investigadores cuenten con un modelo que permita la coherencia de todo el proceso y que guie las inferencias que se realicen sobre las respuestas de los estudiantes.

Se debe aclarar que esta no es una propuesta exhaustiva sobre lo que implica el proceso. En efecto, según las necesidades particulares de la evaluación se pueden obviar algunos de los pasos descritos o incluir otros tomando en cuenta las sugerencias de lecturas para profundizar y la demás literatura disponible.

Finalmente, el proceso de medir y evaluar es laborioso y se convierte en un desafío, pero brinda frutos que enriquecen la construcción del conocimiento y el trabajo en el aula.

Referencias

Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. Educational and Psychological Measurement, 45, 131-142. doi:10.1177/0013164485451012

American Educational Research Association, American Psychological Association y National Council on Measurement in Education (2014). Standards for educational and psychological testing. Washington, DC: Author.

Arieli-Attali M, Ward S, Thomas J, Deonovic B and von Davier AA (2019) The Expanded Evidence-Centered Design (e-ECD) for Learning and Assessment Systems: A Framework for Incorporating Learning Goals and Processes Within Assessment Design. Front. Psychol. 10:853.doi:10.3389/fpsyg.2019.00853

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires, Conferencia inaugural.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En: J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Primeras Jornada Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. (pp. 55-61). Granada.

Bayer S., Klieme E. y Jude N. (2016). Assessment and Evaluation in Educational Contexts. En: Kuger S., Klieme E., Jude N., Kaplan D. (eds.) Assessing Contexts of Learning. Methodology of Educational Measurement and Assessment. Cham: Springer.

Casanova, M. A. (1998). Evaluación: concepto, tipología y objetivos. La evaluación educativa. México, Biblioteca Actualización del Maestro. SEP-Muralla, (pp.67-102).

Cronbach, L. J. (1989). Construct validation after thirty years. In R. E. Linn (Ed.), Intelligence: Measurement, theory, and public policy (pp. 147–171). Urbana: University of Illinois Press.

Cronbach, L. J., y Meehl, P. E. (1955). Construct validity in psychological tests. Psychological Bulletin, 52, 281–302.

Davis-Becker, S. L. y Buckendahl, C. W. (2013). A proposed framework for evaluating alignment studies. *Educational Measurement: Issues and Practice*, *32*(1), 23–33.

Dorans N. J., y Cook, L. (2016). Fairness in educational assessment and measurement. New York: Taylor & Francis.

Drasgow, F. (Ed.) (2016). Technology and testing. Nueva York: Routledge.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos. Una aproximación a su utilización. Avances en Medición, 6, 27-36

Espinoza Freire, E. E. (2019). Las variables y su operacionalización en la investigación educativa. Segunda parte. *Re- vista Conrado*, 15(69), 171-180. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Haladyna, T. M., y Rodríguez, M. C. (2013). *Developing and validating test items*. London: Routledge.

Hogan, T. P. y Murphy, G. (2007). Recommendations for preparing and scoring constructed-response items: What the experts say. *Applied Measurement in Education*, *20*, 427-441.

Messick, S. (1989). "Validity". En: R. L. Linn (Ed.). Educational measurement. Washington, DC: American Council on Education. (pp.13-104).

Mislevy, R. et al (2017). Assessing Model-Based Reasoning using Evidence- Centered Design: A Suite of Research-Based Design Patterns. Spring

Mislevy, R. J. y Riconscente, M. M. (2005). "Evidence-centered design: Layers, structures, and terminology". Menlo Park, CA: SRI International.

Mislevy, R., Almond, R. y Lukas, J. (2003). A brief introduction to evidence-centered design. Educational Testing Service, Princeton, NJ.

Muñiz, J., y Fonseca-Pedrero, E. (2019). Diez pasos para la construcción de un test. Psicothema, 31(1), 7-16. https://doi.org/10.7334/psicothema2018.291}

Shultz, K. S. y Whitney, D. J. (2005). *Measurement theory in action: Case studies and exercises*. Sage.

Sireci, S., y Zenisky, A. L. (2016). Computerized innovative item formats: Achievement and credentialing. En S. Lane, M. R. Raymond y T. M. Haladyna (Eds.), Handbook of test development (pp. 313-334). Nueva York: Routledge.

Sireci, Stephen y Faulkner-Bond, Molly (2014). Validity evidence based on test content. Psicothema, 26(1),100-107.[fecha de Consulta 25 de Febrero de 2022]. ISSN: 0214-9915. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=72729538016

Soto, C. A. M. y Livia-Segovia, J. (2022). Rating mean of expert judges and asymmetric confidence intervals in content validity: An SPSS syntax. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *38*(2), 395-398.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.). (2015). Task design in mathematics education: An ICMI Study 22. Heidelberg, Germany: Springer.

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS QUE MOVILIZAN ESTUDIANTES DE GRADO PRIMERO

MATHEMATICAL PRACTICES THAT MOBILIZE FIRST GRADE STUDENTS

Sara Crystal Cano Molina, Mónica Marcela Parra-Zapata, María Camila Ocampo-Arenas
Universidad de Antioquia (Colombia)
crystal.cano@udea.edu.co, monica.parra@udea.edu.co, camila.ocampo@udea.edu.co

Resumen
En este documento presentamos los elementos que constituyen los resultados de una investigación que analizó las prácticas matemáticas de los/las estudiantes del grado primero, en compañía de la primera autora como profesora, en una institución educativa privada de la ciudad de Medellín. El referente conceptual está enmarcado en la teoría de la actividad matemática y las prácticas matemáticas, las cuales parten del enfoque sociocultural propuesto por Vygotsky, también está orientado en los postulados de Obando (2015), quien propone elementos que caracterizan las prácticas matemáticas: *objetos, conceptos, procedimientos, instrumentos, problemas y formas de discursividad*. La implementación metodológica se dio a través de un ambiente de aprendizaje en torno a los problemas aditivos y a una aproximación al sistema de numeración decimal. Al caracterizar tales prácticas matemáticas, encontramos que las acciones realizadas, al constituirse con base en los elementos planteados por Obando (2015) posibilitan la movilización de los/las estudiantes y la construcción del aprendizaje.

Palabras clave: prácticas matemáticas, actividad matemática, enfoque sociocultural, aprendizaje, enseñanza.

Abstract
In this document we present the elements that constitute the results of a research that analyzed the mathematical practices of first grade students, in the company of the first author as a teacher, in a private educational institution in the city of Medellín. The conceptual reference is framed in the theory of mathematical activity and mathematical practices, which are based on the sociocultural approach proposed by Vygotsky, it is also oriented in the postulates of Obando (2015), who proposes elements that characterize mathematical practices: objects, concepts, procedures, instruments, problems and forms of discourse. The methodological implementation took place through a learning environment around additive problems and an approach to the decimal numbering system. When characterizing such mathematical practices, we find that the actions carried out, being based on the elements proposed by Obando (2015), enable the mobilization of students and the construction of learning.

Keywords: mathematical practices, mathematical activity, sociocultural approach, learning, teaching.

Introducción

El problema de investigación lo enfocamos hacia el análisis de las prácticas de aula que se desarrollan en el área de matemáticas, por parte de los/las estudiantes y su profesora (en este caso, la primera autora de este artículo funge en este rol), en el grado primero (5 a 7 años de edad) en una institución educativa privada de la ciudad de Medellín. El problema, fue orientado a través de la pregunta de investigación: *¿cómo se constituyen las prácticas matemáticas en el aula, con estudiantes de grado primero, para potenciar la construcción y movilización del aprendizaje?* y por el objetivo de investigación: *identificar la constitución de las prácticas matemáticas en el aula, con estudiantes de grado primero, para potenciar la construcción y movilización del aprendizaje.* El problema lo sustentamos en dos componentes, uno empírico y uno teórico.

En el componente empírico, identificamos en las prácticas de aula, que a pesar de que la institución lleva una guía estructurada en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir de los referentes de calidad de Colombia y su modelo pedagógico institucional, algunos/algunas estudiantes presentan dificultades a la hora de construir el conocimiento con base en los conceptos matemáticos.

En concordancia con lo anterior, para el componente teórico presentamos una revisión de la literatura guiada a partir de los planteamientos de Obando et al. (2014), quienes expresan que las acciones que están enfocadas a guiar y orientar las maneras de hacer y de pensar de los sujetos son denominadas prácticas de aula y se dan en una institución específica. Estos autores también se refieren a las prácticas matemáticas y mencionan que estas son las prácticas de aula que tienen el objetivo delimitado de enseñar-aprender contenido matemático; las cuales se inscriben en el enfoque sociocultural propuesto por Vygotsky. Por su parte, Obando (2019) afirma que para caracterizar unas prácticas matemáticas es necesario e importante analizar una serie de elementos, los cuales son: *objetos, conceptos, procedimientos, instrumentos, problemas y formas de discursividad*.

Desarrollaremos a continuación los elementos conceptuales, metodológicos y analíticos que orientaron la investigación y que permitieron atender la pregunta de investigación propuesta.

Referente conceptual

El referente conceptual que orienta la investigación y que sustenta el análisis de la misma, está basado en los fundamentos del enfoque sociocultural propuesto por Vygotsky y en las prácticas matemáticas planteadas por Obando (2015) y estos, los proponemos a partir del diálogo entre la teoría de la actividad matemática, las prácticas matemáticas y sus componentes según Obando (2015).

Enfoque sociocultural

Vygotsky plantea que lo histórico, social y cultural intervienen en el proceso de aprendizaje del individuo, de este modo, él afirma que los estímulos que recibe el ser humano de la realidad exterior afectan rotundamente el proceso mediante el cual adquiere conocimiento y construye así las funciones psíquicas superiores (atención, percepción, memoria, pensamiento, lenguaje) (Vygotsky, 2000).

La teoría central del enfoque sociocultural según Vygotsky, está enmarcada en dos grupos, los cuales cumplen un papel fundamental en el desarrollo de la experiencia humana y están relacionados entre sí, estos son, la cultura, en la que encontramos lo externo, sucesos históricos y las relaciones sociales; y el esquema cognitivo del individuo en donde está lo interno, como la atención, la percepción y la memoria (Jiménez et al., 2017). Si bien, son conceptos totalmente diferentes, en el proceso de la experiencia humana y el aprendizaje, se encuentran íntimamente relacionados, pues la cultura afecta directamente la parte interna del ser, los procesos sociales influyen en el desarrollo del comportamiento y las conductas humanas (Obando, 2015).

Otro de los autores que sustenta esta idea es Dewey (1960), en cuanto a las prácticas y las acciones, él menciona que estas permiten el desarrollo de la experiencia por medio de la interacción, en donde todos tienen una participación. Por lo tanto, la educación debe concebirse como un proceso social y cuando esto sucede, la situación educativa se transforma completamente y se posibilitan procesos de cambio en los que todos/todas puedan participar.

De aquí, la visión sociocultural de la educación, en la cual se hace posible comprender el desarrollo humano a partir de sus acciones y el entorno que le rodea. Con esta mirada, podemos entonces afirmar que la visión sociocultural de la educación se hace evidente en el campo de las matemáticas, pues el sujeto que llega con una estructura mental individual, también interactúa y se relaciona con el otro/la otra en un contexto institucional y con base en esto, es posible redirigir su accionar matemático, pues no se trata meramente de conocer los conceptos propios, sino de transformarlos mediante la interacción. Para Obando et al. (2014), lo individual y lo social están relacionados de manera estrecha en el aprendizaje de las matemáticas y tal relación esta mediada por lo que llamamos actividad matemática. A continuación, expondremos elementos de la actividad matemática.

Actividad Matemática

La teoría de la actividad matemática es acogida por el enfoque sociocultural propuesto por Vygotsky, en donde señala que "el concepto de actividad, es un principio explicativo a partir del cual dar cuenta del cómo la cultura es mediadora en el proceso de constitución de la conciencia humana" (Jaramillo et al., 2009, p. 9). Es decir, el comportamiento del ser humano surge de las acciones que este genera con la cultura y que para él/ellas resultan significativas, es por esto, que, en esta teoría, la actividad, es vista como ese proceso en el cual participan un colectivo de personas y la interacción entre ellas permite la construcción de significados, es así como a través de la conciencia individual se crean procesos sociales.

La actividad, entonces, es el conjunto de acciones que realizan los seres humanos en una práctica en particular y las orientan a un fin (Jaramillo et al., 2009). Tal orientación de las prácticas es dada de manera intencional según el campo determinado para estas, proyectándolas así a objetivos específicos, sin embargo, aquí se hace presente la subjetividad, por medio de la cual los individuos regulan su accionar en la actividad y muestran así su posición frente al mundo y transformando los sistemas de prácticas (Obando et al., 2014).

Para Obando et al. (2014) la actividad matemática también es entendida como un proceso en el que la interacción y la reflexión son ejes fundamentales en la transformación de las prácticas matemáticas en un contexto específico llamado institución permeado por una realidad histórica, social y cultural. Así pues, dichas acciones se movilizan en torno a un objetivo específico, el cual es definido por el contexto particular, en el que convergen las subjetividades del sujeto con las construcciones históricas y culturales.

De acuerdo con esta concepción de la actividad, la actividad matemática se define como el accionar de las personas en un contexto de prácticas determinado y orientado a un fin específico, en este caso la solución de problemas. Obando (2015) afirma que la Actividad Matemática se hace visible específicamente en las prácticas matemáticas, ya que es allí donde se propician las tareas matemáticas a realizar por parte del individuo, es decir, es en dichas prácticas es donde el sujeto piensa, habla y hace matemáticas; configurando así, la Actividad Matemática. En las prácticas emergentes, en el campo de las matemáticas, surgen maneras definidas de hacer y de pensar, lo que permite denominar dichas acciones como actividad matemática. A continuación, detallaremos asuntos conceptuales de las prácticas matemáticas.

Prácticas matemáticas

En un sistema de prácticas, la subjetividad con la que el individuo se posiciona frente al mundo, permite actualizar y transformar las condiciones objetivas sociales y en este sentido se hace posible redirigir las acciones de los individuos, es decir, la actividad. Tales subjetividades influyen en las maneras en que el sujeto orienta su acción y a partir de ello, puede reflexionar y construir conocimiento (Obando, 2015).

Obando (2015), plantea que las prácticas matemáticas son el conjunto de las acciones de los sujetos y que, en el desarrollo de la actividad matemática, la objetividad y la subjetividad se encuentran intrínsecamente relacionadas, pues tales acciones son orientadas y mediadas culturalmente, es decir, por las condiciones objetivas del contexto y que, mediante la interacción con el otro, pueden ser transformadas. Es posible resaltar que las prácticas matemáticas se componen de las prácticas de enseñanza y las prácticas de aprendizaje, en donde ambas se encuentran relacionadas. En dicha relación, la enseñanza y el aprendizaje, se encuentran ligadas una a la otra, en donde se hacen presentes unos sujetos, objetivos, motivos y fines específicos. En las prácticas de enseñanza, se encuentra el profesor/la profesora, quien tiene como objetivo enseñar y para esto realiza una organización de la enseñanza y toma la decisión de cómo trabajar los conocimientos. En las prácticas de aprendizaje, está el estudiante, cuyo objetivo es aprender y al apropiarse de los contenidos le es posible resolver problemas de aprendizaje (Jaramillo et al., 2009).

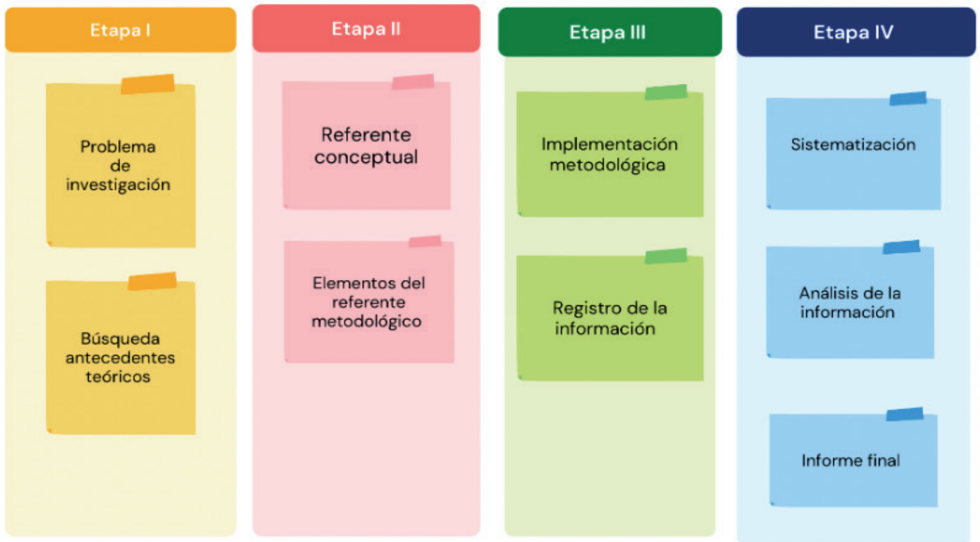
En este sentido, en la búsqueda de la literatura, para caracterizar las prácticas matemáticas en el aula, encontramos que Obando (2015) plantea ciertas características importantes que se deben tener en cuenta en las prácticas matemáticas, las cuales son: *los objetos de conocimiento, los conceptos, los instrumentos, los procedimientos, los problemas, el discurso y la configuración epistémica*. *Los objetos* hacen referencia a las construcciones simbólicas que han surgido a través de la historia (ecuaciones, algoritmos, definiciones, entro otros); *los conceptos* hacen parte de lo que se enuncia de los objetos; *los instrumentos* son los recursos y medios para llevar a cabo la acción matemática (signos, símbolos, gráficos); *los procedimientos* son las maneras específicas de hacer y son posibles gracias a los instrumentos; *los problemas* hacen alusión a los enunciados que orientan la acción de los sujetos y *el discurso* es el lenguaje y la manera de expresar las operaciones matemáticas (Obando, 2019).

Fundamentos metodológicos

La investigación que realizamos indagó por cómo se constituyen las prácticas matemáticas en el aula, con estudiantes del grado primero, para potenciar la construcción y movilización del aprendizaje, en una institución educativa de la ciudad de Medellín. Para ello desarrollamos un ambiente de aprendizaje titulado ***"Jugando a la tienda escolar con el sistema de numeración decimal".***

Esta investigación la desarrollamos en 4 etapas. La etapa I se constituyó después de realizar una reflexión acerca de las prácticas en el aula de la experiencia como profesora de estudiantes de primer grado de la primera autora de este artículo, fue allí donde surgió el problema que investigamos; también iniciamos la búsqueda de antecedentes teóricos que permitieron fortalecer dicho problema. En la etapa II se dio la apropiación del referente conceptual, el cual nos ayudó a proponer soluciones para la pregunta de investigación planteada y posibilitó reconocer los elementos principales que dieron pie al referente metodológico. En la etapa III realizamos la implementación metodológica por medio de un ambiente de aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) llamado *Jugando a la tienda escolar con el sistema de numeración decimal* y aplicamos el registro de la información por medio de la observación participante, grabaciones (audio y video), diario de campo y documentos de los/las estudiantes. En la etapa IV organizamos y sistematizamos toda la información obtenida en el desarrollo del ambiente de aprendizaje para realizar el análisis y las conclusiones del informe final. En la figura 1 sintetizamos este proceso.

Figura 1. *Desarrollo del proceso de investigación.*



Fuente: elaboración propia.

Ambiente de Aprendizaje. Jugando a la Tienda Escolar con el Sistema de Numeración Decimal

Desarrollamos la implementación metodológica en una institución educativa privada de la ciudad de Medellín con estudiantes del grado primero (5–7 años). Este proceso se implementó en sesiones sincrónicas asistidas por la plataforma virtual Zoom, debido al confinamiento que ocasionó la Pandemia por COVID-19. Para el desarrollo, retomamos los análisis realizados a las clases observadas para la consolidación del problema de investigación, a partir de ellos y en vínculo con los elementos conceptuales propusimos un ambiente de aprendizaje entendido como un espacio en el que se promueve la motivación y el interés de los y las estudiantes para fomentar la participación en torno a situaciones matemáticas y la vida en general (Parra-Zapata, 2015).

Dicho ambiente fue nombrado: *Jugando a la tienda escolar con el sistema de numeración decimal* y se desarrolló en seis momentos lineales, en los cuales participamos en una serie de tareas matemáticas en torno a problemas aditivos. El centro del ambiente estuvo en la creación de una tienda escolar y por medio de los billetes decimales[1] se hizo una introducción al sistema de numeración decimal. Los billetes decimales son un material didáctico de autoría de la profesora Olga Botero que consisten en fichas en forma de billetes con denominaciones 1, 10, 100, 1000, etc.

[1] Los billetes decimales tienen Licencia para su uso; sin embargo, para el desarrollo de este trabajo de investigación la autora de los mismos, nos dio la autorización para reproducir de manera controlada el material en las sesiones de clase. Ver Botero (2020).

Figura 2. Momentos ambiente de aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

En el primer momento (figuras 3 y 4), conversamos acerca de una serie de imágenes alusivas a tiendas y las acciones que se hacen en dichos lugares, a partir de cuatro preguntas: *¿qué es una tienda? ¿qué puedo hacer con dinero en una tienda? ¿cómo conseguimos dinero en la vida real? ¿de qué manera podemos pagar en una tienda?* (preguntas de una de las investigadoras, 12 de abril del 2021). Luego, explicamos el concepto social de tienda y las cosas que las personas hacen allí, las condiciones para comprar y vender; esto con el fin de contextualizar lo que haríamos en nuestra tienda escolar, donde tuvimos diferentes productos escolares y utilizamos los billetes decimales como dinero para comprar y pagar. Posterior a esto, mostramos el listado de productos y precios a los/las estudiantes y, por último, los/las estudiantes realizaron las etiquetas de precios.

Figura 3. Respuestas de algunos/algunas de los/las estudiantes.

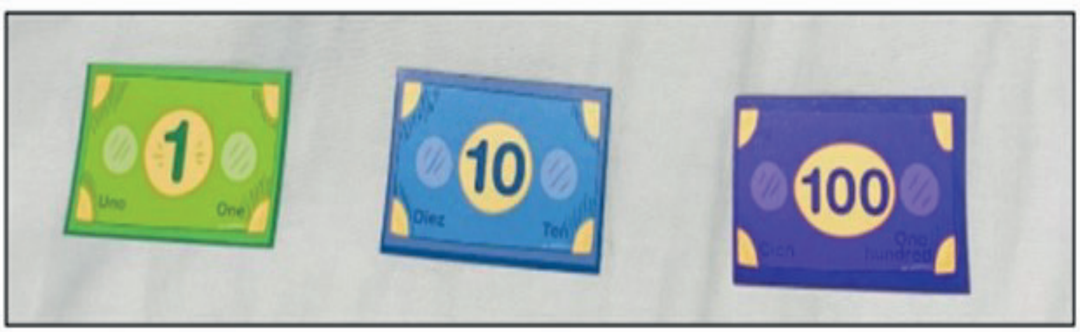
Fuente: imágenes propias de los/las estudiantes descargadas de la plataforma de Google Classroom, 12 de abril del 2021.

Figura 4. Productos de la tienda escolar.

Fuente: elaboración propia.

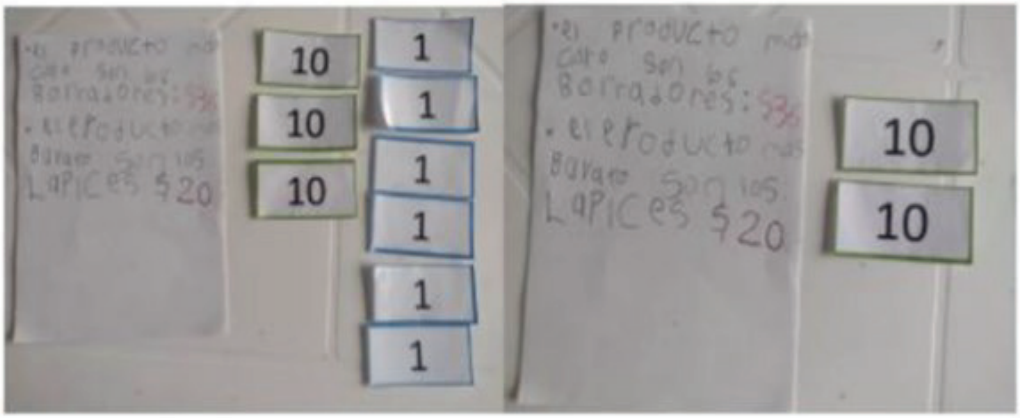
En el segundo momento (figuras 5 y 6), los/las estudiantes observaron cada uno de los productos y sus respectivos precios, con el fin de revisar cuál producto querían comprar y pensar si con el dinero que tenían podrían comprarlo. Aquí hicimos dos preguntas: *¿si compro más productos, aumenta o disminuye el valor? ¿será que nos alcanza el dinero para comprar el producto que queremos?* (preguntas de una de las investigadoras, 13 de abril del 2021). Estas fueron algunas de sus respuestas: *"dos valen más y uno vale menos"; - "dos valen más y uno valen menos porque si fuera uno valdría poquito pero si quiere comprar dos, jum demasiado", "que creo que si me alcanza para comprar un borrador con el dinero que tengo porque cuando me imprimieron los billetes había muchos, mi mama me dijo que habían como 100 de 1"* (comentarios de estudiantes, abril 13 del 2021). Después realizamos un conteo del total de los billetes decimales que tenían, con el fin de conocer el valor del dinero total que tenían para realizar sus compras (ellos/ellas tenían los siguientes billetes: 100 billetes de 1, 10 de 10 y 1 de 100).

Figura 5. Billetes decimales.



Fuente: fotografía propia de los billetes decimales diseñados por la profesora Olga Botero.

Figura 6. Representación del precio más caro y más barato de la tienda escolar.

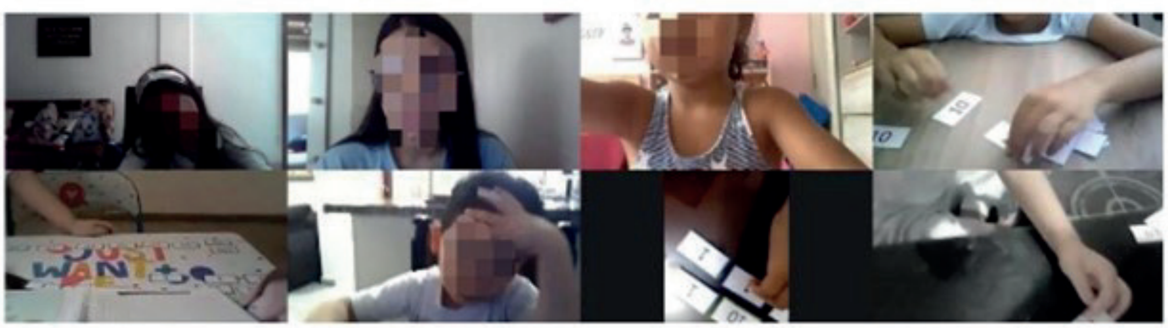


Fuente: imágenes propias de los/las estudiantes descargadas de la plataforma de Google Classroom, 13 de abril del 2021.

El tercer momento (figuras 7 y 8), se distribuyó en dos clases diferentes, en la primera, retomamos que en la cotidianidad compramos diferentes cosas con el dinero que tenemos y que a medida que pagamos lo comprado, ese dinero disminuye. Los/las estudiantes observaron los productos y debían determinar qué querían comprar, representar con sus billetes decimales el precio de cada uno y, finalmente, pagar por ellos. Posterior a esto, debían realizar el conteo de los billetes que les habían quedado luego de pagar. La estrategia que les dimos fue, primero contar con los billetes decimales el precio del producto que querían, dejarlo a un lado para pagar y volver a hacer el conteo de los billetes que quedaron.

En la segunda clase del tercer momento, explicamos que si deseamos saber si nos alcanza para comprar algún producto con nuestro dinero, lo que debemos hacer es, primero contar y conocer cuánto dinero tenemos, segundo reconocer cuánto vale el producto y si el precio del producto es menor al del dinero total, quiere decir que me alcanza y lo puedo comprar, al pagarlo, el dinero que teníamos inicialmente va a disminuir y lo que queda es el dinero que sobró después de la compra. Posteriormente, los/las estudiantes eligieron un producto que deseaban comprar; debían representar el precio de este y determinar si les alcanzaba para comprarlo o no con el dinero que les quedaba. Por último, contaron los billetes que les sobraron después de haber pagado dicho producto.

Figura 7. Representación del precio del producto que deseaban comprar.



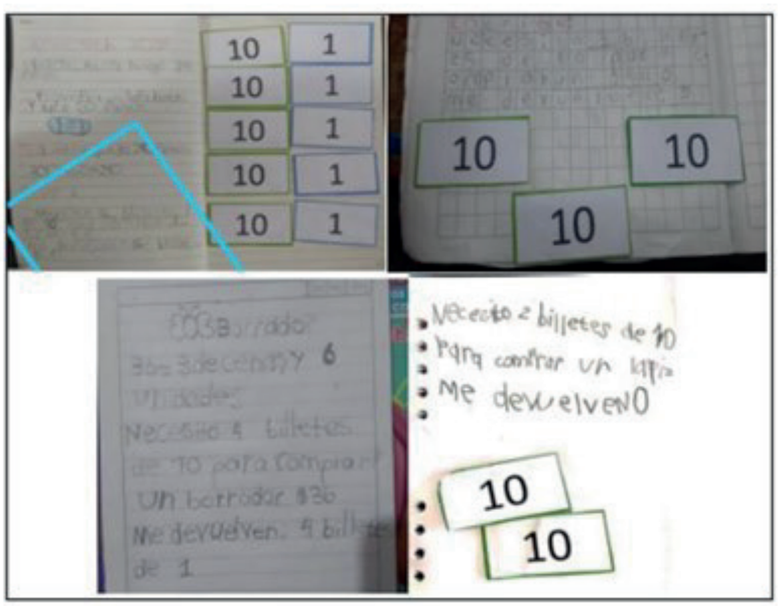
Fuente: captura de pantalla durante la clase online por medio de la plataforma Zoom, 19 de abril de 2021.

Figura 8. Representación de precios de los productos de la tienda escolar.

Fuente: imágenes propias de los/las estudiantes descargadas de la plataforma de Google Classroom, 26 de abril del 2021.

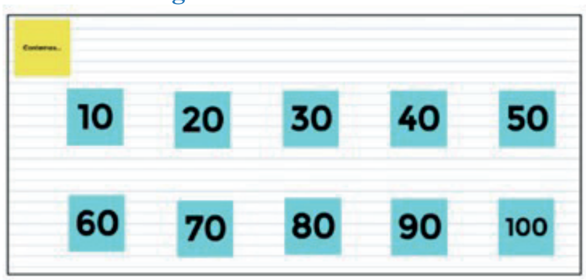
En el cuarto momento (figuras1 9 y 10), realizamos conteo de 10 en 10 por medio del tablero numérico, el cual es un instrumento visual online que presenta los números de 10 en 10 hasta 100 y con los billetes decimales. Las compras para este día solo estuvieron autorizadas para pagarlas con billetes de 10, para ello, los niños y las niñas observaron por medio de fotografías los productos de la tienda y revisaron cuál producto deseaban comprar y cuántos billetes de 10 necesitarían para pagarlos. Por medio de esta actividad abordamos los objetos de decenas y unidades, también determinaron si les sobraba dinero al pagar solo con billetes de 10 y cuánto les debíamos devolver.

Figura 9. Proceso para pagar productos sólo con billetes de 10.



Fuente: imágenes propias de los/las estudiantes descargadas de la plataforma de Google Classroom, 3 de mayo del 2021.

Figura 10. Tablero numérico.



Fuente: captura de pantalla a ayuda visual en formato PDF para la clase online, 3 de mayo del 2021.

En el quinto momento (figura 11), los/las estudiantes eligieron el producto que comprarían este día y luego, representaron por medio de los billetes decimales el precio de este de la manera más conveniente posible, es decir, con la menor cantidad de billetes. Concluimos que un producto puede ser pagado de varias maneras con los billetes, si hacemos uso de los billetes de 1 utilizaríamos muchos billetes, pero si pagamos con billetes de 10 utilizaríamos menos billetes, también se observó que un producto puede ser pagado mezclando billetes de 10 y billetes de 1. Los productos pueden ser pagados de diferentes maneras. La primera, consiste en solo usar billetes de 1, cuando se paga con estos es posible pagar el precio exacto del producto; la segunda, con los billetes de 10 y de 1, así también permite pagar el precio exacto en la tienda; y la tercera, consistía en solo usar los billetes de 10 para pagar, al hacerlo así se paga con decena, para los casos en que los productos tienen un valor exacto de decenas el pago sería preciso, sin embargo, en los productos que su precio no es una decena exacta, la tienda tendría que hacer devolución del dinero adicional que se pagó con los billetes de 10. El objetivo de buscar la manera más fácil con la que se pudiera pagar, consistía en que ellos/ellas indagaran la forma más rápida y sencilla para representar diferentes números, en este caso, los precios de los productos.

Figura 11. Evidencia del pago de los productos de la manera más conveniente (menos billetes).

Fuente: imágenes propias de los/las estudiantes descargadas de la plataforma de Google Classroom, 10 de mayo del 2021.

En el sexto momento, para dar por terminado el ambiente, realizamos diferentes tareas matemáticas, las cuales consistían en diversos retos matemáticos de suma y resta, estos se constituyeron en torno a la tienda escolar y debían ser resueltos con ayuda de los billetes decimales. Los retos debían ser resueltos en el menor tiempo posible y quien lo logró, obtuvo como premio un producto de la tienda escolar. Para los/las estudiantes este momento fue llamativo y los motivó a participar, además, fue enriquecedor puesto que implicó que pusieran a prueba los conocimientos matemáticos construidos para dar solución a diversos problemas. Su motivación inicial era ganar el premio, sin embargo, esto los llevó a ejecutar tareas matemáticas, que al ser resultas correctamente también significaba un logro para cada uno de ellos/cada una de ellas, lo cual evidenciaba su movilización y construcción frente al aprendizaje.

Conclusiones

Esta investigación aporta a la Educación Matemática en las infancias porque reconoce la importancia de realizar prácticas matemáticas intencionadas, donde se hagan presentes los elementos que caracterizan dichas prácticas, incluyendo en estos los factores sociales y culturales, con el fin de potenciar la construcción del aprendizaje y la movilización de los/las estudiantes de una manera integral con relación a los conocimientos matemáticos.

Esta investigación, también nos permitió, identificar, que, para aportar en la construcción del conocimiento matemático, las prácticas de enseñanza y las prácticas de aprendizaje se encuentran intrínsecamente relacionadas y que son precisamente ellas, las que conforman las prácticas matemáticas en el aula. Y las prácticas matemáticas, incluyen entonces, las tareas matemáticas, las cuales son propuestas por el profesor/la profesora dentro de sus prácticas de enseñanza, con el objetivo de enseñar matemáticas; y son los/las estudiantes quienes desarrollan dichas tareas en sus prácticas de aprendizaje, con el fin de aprender matemáticas.

Otro de los aportes de esta investigación a la Educación Matemática en las infancias, es que los profesores/las profesoras, piensen en escenarios creativos en pro de la enseñanza de las matemáticas, donde lo tradicional pierda valor y el proceso de enseñanza-aprendizaje, se dé en ambientes de aprendizaje que promuevan los intereses de los/las estudiantes, donde el conocimiento no se quede en lo abstracto, sino que se pueda concretar en acciones cotidianas que realizamos los sujetos día a día, construyendo así aprendizajes significativos. El ambiente de aprendizaje permitió que los/las estudiantes vivenciaran escenarios diferentes a los tradicionales en el aula, en los que encontraron motivación para participar en las clases.

Uno de los aportes más significativos radicó en que la realización de esta investigación, llevó a indagar, investigar, conocer y aprender fundamentos teóricos, que son esenciales para promover la construcción del conocimiento matemático en el aula y que cualquier profesor/profesora que se desenvuelva en dicha área debe comprender. Consideramos importante destacar lo antes mencionado, ya que, en la clase de matemáticas en las infancias, constantemente se generarán situaciones que posibiliten los procesos enseñanza y aprendizaje con relación a las matemáticas y que el deber o responsabilidad, va más allá de conocer lo superficial del conocimiento matemático a enseñar, pues existen elementos fundamentales que no deberían omitirse en tales momentos, sino que como profesores/profesoras debemos tener presente y mediar las prácticas en torno a estos.

Para concluir, esta investigación posibilitó un proceso de autorreflexión sobre la práctica en tanto brindó elementos para analizar y reflexionar frente a las propias prácticas en el aula de una de las autoras y a su vez, reconocer la importancia de hacerlo. En ocasiones, por el afán y la premura de cumplir cada día con lo que debemos en nuestro rol como profesores/profesoras, olvidamos aspectos importantes que también hacen parte de nuestra formación y profesión, tal como lo es, la reflexión de nuestras acciones en el aula, en donde el objetivo debe ser siempre transformar y mejorar las prácticas de enseñanza, para favorecer las prácticas en aprendizaje y de esta manera, hacer posible la construcción del aprendizaje por parte de los/las estudiantes.

Referencias

Botero, O. (2020). Billetes decimales, material didáctico para la enseñanza del sistema de numeración decimal. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa-ALME, 33*(2). 286-298.

Dewey, J. (1960). *Experiencia y educación.* (L. Luzuriaga, Trad.) UNESCO. (Obra original publicada en 1938).

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). *El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase.* Curso dictado en 10o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/760/1/elconocimiento.pdf

Jiménez, A., Zapata, C. y Cautiva, F. (2017). *Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales.* (Trabajo de grado, Universidad de Antioquia, Medellín). Universidad de Antioquia.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica.* (Tesis doctoral, Universidad del Valle. Cali, Colombia). Recuperada de http://funes.uniandes.edu.co/10598/1/Zapata2016Sistema.pdf

Obando, G. (2019). Sistemas de prácticas matemáticas: lo individual y social del conocimiento matemático. *Ruta maestra, 26.* 110-115. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/336044351_Sistemas_de_practicas_matematicas_lo_individual_y_social_del_conocimiento_matematico

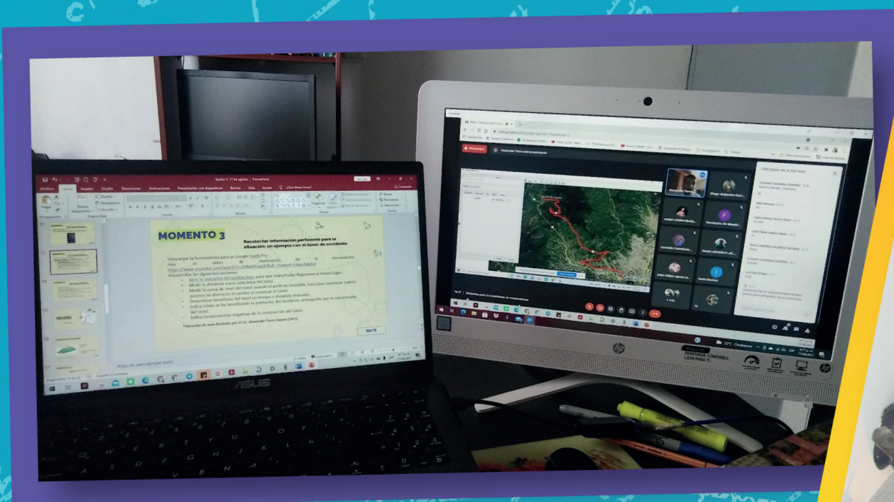
Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica, 3*(20). 72-90.

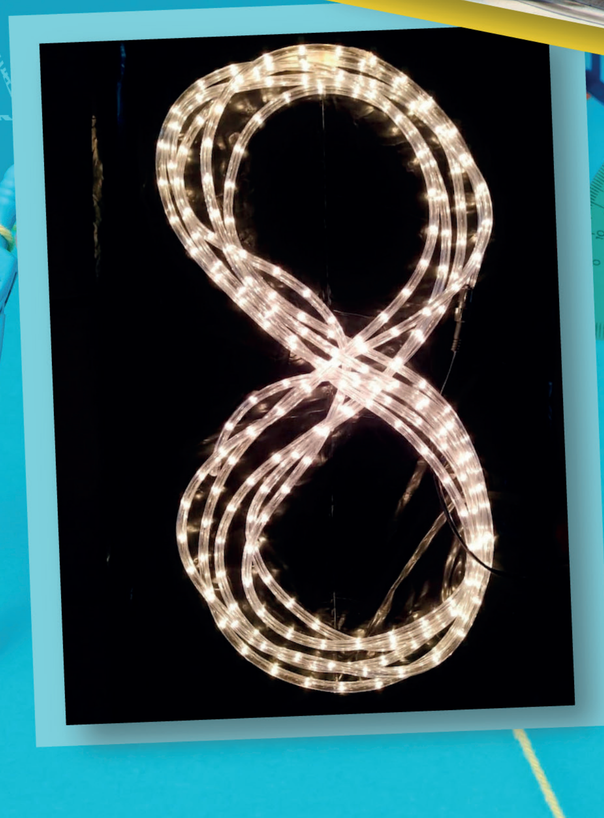
Parra-Zapata, M.M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática.* (Tesis de maestría, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia). Universidad de Antioquia.

Vygotsky, L. (2000). *Obras Escogidas, Tomo III, Historia Del desarrollo de las funciones psíquicas superiores.* Visor Dis. S.A..

SECCIÓN 5

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS





DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: UNA SESIÓN FOTOGRÁFICA EN UN PARQUE EÓLICO

DESIGN OF A LEARNING SITUATION FOR TRIGONOMETRIC RATIOS: A PHOTOGRAPHIC SESSION IN AN EOLIC PARK

Rigoberto Ruiz Esquivel, Francisco Sanabria Zúñiga, Fabián Wilfrido Romero Fonseca
Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
rigoberto.ruiz@ucr.ac.cr, francisco.sanabria@ucr.ac.cr, fabian.romero@ucr.ac.cr

Resumen
Se pretende con este trabajo reflexionar sobre la resolución de una situación de aprendizaje enmarcado en el contexto de la toma de fotografías en un parque eólico, buscando la significación de las razones trigonométricas básicas a partir de su uso. De esta manera, se planteó una situación de aprendizaje construida mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje, la cual parte de estrategias y consideraciones por parte del docente, cuya meta es el significar la relación no proporcional entre ángulo y la cuerda, pero se desconoce el camino o trayectoria que los estudiantes recorran para alcanzar el objetivo establecido. A partir de la implementación de la situación planteada en un formato de taller con docentes de matemáticas, se obtiene que dicho proceso THA brinda un escenario de análisis y reflexión sobre la práctica docente, donde se destacan la necesidad de predecir los posibles caminos que recorren los estudiantes para adquirir un conocimiento y el reto que significa para los docentes identificar que el alumno recorre una trayectoria distinta a la pensada previamente no significa que el estudiante esté en algo incorrecto.

Palabras clave: trigonometría, razones trigonométricas, trayectoria hipotética de aprendizaje.

Abstract
The purpose of this work is to reflect on the resolution of a learning situation framed in the context of taking photographs in a wind farm, seeking the meaning of the basic trigonometric ratios from their use. In this way, a learning situation constructed by means of a hypothetical learning trajectory was proposed, which is based on strategies and considerations by the teacher, whose goal is the meaning of the non-proportional relationship between angle and chord, but the path or trajectory that the students will follow to reach the established objective is unknown. This trajectory is based on the results of research in Mathematics Education. From the implementation of the situation proposed in a workshop format with teachers of math, it is obtained that the THA process provides a scenario for analysis and reflection on teaching practice, where is highlighted the need to predict the possible paths that students follow to acquire knowledge and the challenge for teachers to identify that the student follows a path different from the one previously thought does not mean that the student is doing something wrong.

Keywords: trigonometry, trigonometric ratios, learning hypothetical trajectory.

Introducción

El desarrollo del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas propuesto por Simon (1995), representa la relación entre las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje, lo conocido sobre el aprendizaje de un contenido, representaciones, materiales, las actividades matemáticas y las hipótesis del docente respecto a lo que comprenden los estudiantes.

Siguiendo la metodología de la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), se busca estudiar las razones trigonométricas en el contexto de la toma de fotografías, reconociendo que el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse a una simple reproducción de resultados previamente elaborados, sino que debe ser producto de una serie de construcciones y articulaciones de las mismas, las cuales se establecen con el propósito de generar una situación de aprendizaje que permita a los y las estudiantes construir significados alrededor de un determinado tema, lo cual conlleva a que el docente aprenda a analizar los procesos de aprendizaje, relacionados a dichas razones, en un contexto cercano a las matemáticas que conocen los estudiantes.

Para dicho fin, limitamos el campo de acción de este trabajo a la trigonometría, donde se busca aplicar las razones trigonométricas básicas en diversos contextos, de modo que abordamos el uso de estas "para estudiar y cuantificar la relación (no proporcional) entre un ángulo central, en el círculo, y la cuerda que subtiende" (Scholz, 2020, p.52). De esta manera, se realiza una adaptación de una actividad propuesta en Montiel (2012), donde variamos el contexto, con la intención de representar una situación cotidiana al tomar una fotografía con un teléfono celular, utilizando como referencia un parque eólico costarricense. Además, de presentar la actividad siguiendo la metodología de la THA.

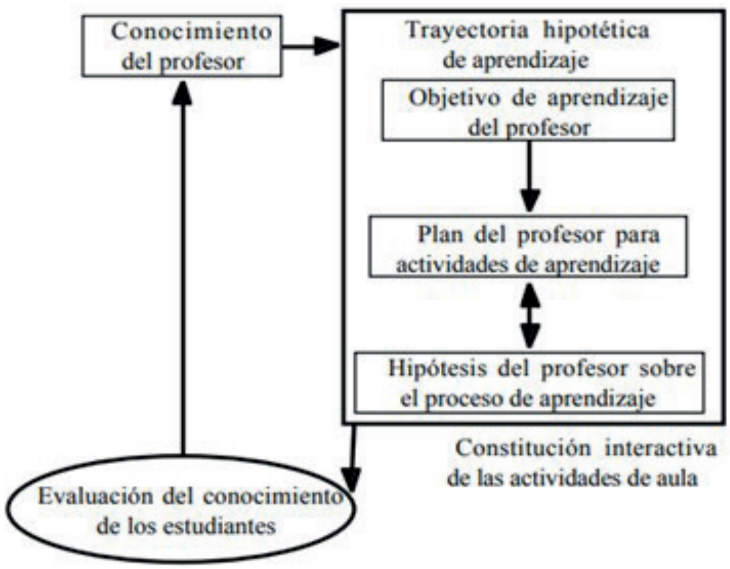
Elementos Teórico-Metodológicos

Según Simon (1995), el desarrollo del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas representa la relación cíclica entre los aspectos del conocimiento, el pensamiento, la toma de decisiones y la actividad del docente. Dicho ciclo describe la relación entre distintas áreas del conocimiento del docente como lo son teorías del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje, lo que conoce sobre el aprendizaje de un contenido, representaciones, materiales y actividades matemáticas. Así, se toma en cuenta el pensamiento, el aprendizaje, las actividades de aprendizaje y la meta del mismo, así como el conocimiento matemático del docente y sus hipótesis al respecto de lo que comprenden los estudiantes.

La meta del aprendizaje motiva un camino o estrategia para el docente abordar el aprendizaje, a este se le denomina trayectoria hipotética del aprendizaje, lo cual es básicamente el plan que realiza el docente para enseñar, tomando en cuenta también su experiencia sobre la forma en que podría proceder el aprendizaje, a pesar de no conocer con certeza el camino de aprendizaje que recorre cada uno de los estudiantes. La importancia de esta trayectoria consiste, según Simon (1995), en que brinda al docente un fundamento para elegir un diseño instruccional particular.

Para Simon (1995) la trayectoria hipotética de aprendizaje consta del objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético, predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje. La Figura 1 esquematiza el ciclo metodológico para crear una THA, el autor hace énfasis en la creación y modificación continua de la trayectoria de hipotética del aprendizaje, señalando que es importante fijar un objetivo, así como el fundamento para enseñar, además de las hipótesis del docente, aspectos que son complementados con nuevas hipótesis producto de las actividades propuestas inicialmente. Las modificaciones a dicha trayectoria pueden realizar cambios en cualquiera o en todos los elementos de la misma, ya sea la meta, las actividades o el proceso hipotético de aprendizaje.

Figura 1. *Diagrama de una THA*



Fuente: Gómez, P. y Lupiáñez, J, 2007, p. 80.

Para Simon (1995) las situaciones que se plantean para el aprendizaje requieren que los estudiantes establezcan diversas conexiones y no simplemente apelar a la memoria o un proceso previamente esquematizado, señalando la probabilidad de que el aprendizaje se fomenta desafiando las concepciones del alumno utilizando una variedad de contextos. Además, menciona que una base amplia de situaciones que desafíen a los estudiantes, así como el conocimiento de las dificultades que se encuentran, permite propiciar el aprendizaje de forma eficaz, cuando se carece de un conocimiento más sólido.

Como la THA considera el recorrido que, supone el docente, llevará a los estudiantes a lograr un aprendizaje, se toman en cuenta la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético, Simon (2014) partiendo de este hecho presenta las siguientes implicaciones:

- La buena pedagogía comienza con un objetivo conceptual claramente articulado.
- Aunque los estudiantes aprenden de maneras idiosincrásicas, hay puntos en común en sus formas de aprendizaje que pueden ser la base de la instrucción. Por lo tanto, se pueden hacer predicciones útiles sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- La planificación de la instrucción implica una predicción informada sobre los posibles procesos de aprendizaje de los estudiantes.
- Basado en la predicción de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la instrucción está diseñada para fomentar el aprendizaje.
- La trayectoria del aprendizaje de los estudiantes no es independiente de la intervención instructiva utilizada. El aprendizaje de los estudiantes se ve afectado significativamente por las oportunidades y limitaciones que brinda la estructura y el contenido de las lecciones de matemáticas.

El objetivo de aprendizaje

Partiendo del hecho de que no se debe limitar el aprendizaje a una simple reproducción de resultados previos, sino que debe generarse a partir de construcciones elaboradas por los mismos estudiantes, basadas en su conocimientos previos y conexiones entre los mismos, a través de situaciones que permitan construir nuevos conocimientos contextualizados, se requiere que el rol del docente sea activo y reflexivo, pues debe encargarse del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje (Montiel, 2012).

Ubicados en el contexto de la educación costarricense, se selecciona como objetivo de aprendizaje el propuesto por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), que plantea “aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos” (MEP, 2012, p. 317), que corresponde al nivel de noveno año (estudiantes de 14 años aproximadamente).

Así, en el caso de la trigonometría desde está visión Montiel (2012) propone “una construcción basada en prácticas y no sólo en conceptos, poniendo énfasis a la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométricas y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico-funcional; en contraste con la visión tradicional sobre el aprendizaje de la razón y la función” (p. 23). La cual sintetiza en la Figura 2.

Figura 2. *Construcción del conocimiento trigonométrico.*

	PRÁCTICA SOCIAL	
	Anticipación	Predicción
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física
Contexto	Estático-proporcional	Dinámico-periódico
Lenguaje	Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones
Racionalidad	Helenística-euclidiana	Física-matemática
Herramienta	Razón trigonométrica	Función trigonométrica
Variables	sen θ (longitud) ϕ ángulo (en grados)	sen x (distancia) x tiempo (radián-real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-infinito

Fuente: Montiel, 2012.

Particularmente las orientaciones del programa oficial de matemáticas propuestas por el MEP respecto a la introducción de las razones trigonométricas en noveno año, pretende que “por medio de la experimentación y el diálogo se logre interiorizar la necesidad de aplicar razones trigonométricas básicas y relaciones trigonométricas” (MEP, 2012, p. 317). Además, sugiere, sin esto representar una obligación, que se puede realizar un trabajo con las mismas al incorporarlas dentro del contexto de la circunferencia “introducir el círculo trigonométrico y el uso de los radianes para establecer la conexión entre geometría analítica y trigonometría con el área de medidas” (p. 318). Lo cual permitiría establecer algunas conexiones en especial con lo referente a medidas, sin embargo, el enfoque que se le brinda a este tema, por lo general, consiste en reducirlo a un proceso aritmético mecánico y no a un uso del conocimiento para resolver problemas.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Siguiendo el ciclo para crear una trayectoria hipotética de aprendizaje, primero fijamos el objetivo de aprendizaje, el cual corresponde a "aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos" (MEP, 2012, p.317), para posteriormente elaborar un plan de actividades que permitan el aprendizaje de dicho objetivo.

De este modo se decide adaptar la situación de aprendizaje que propone Montiel (2012), variando el contexto de la misma planteado por la autora con la intención de implementar una situación de aprendizaje, la cual, puede presentarse de manera un tanto natural a los estudiantes costarricenses del valle central, como lo es la toma de fotografías con su celular, cabe destacar que en general en esta región del país la mayoría de los estudiantes cuentan con acceso a un dispositivo con cámara, por ende la toma de fotografía con el mismo es una situación cotidiana para ellos. Asimismo, se involucra el contexto de un parque eólico pues estos se pueden observar a lo largo del país.

El plan para las actividades de aprendizaje busca provocar el trabajo matemático por parte de los estudiantes a través de la siguiente pregunta generadora ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía, para obtener una imagen completa de una torre eólica? (ver Figura 3).

Figura 3. Representación de la situación en cuestión.

Fuente: Elaboración propia.

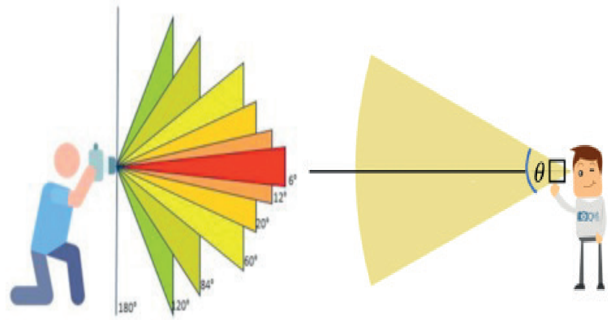
Una vez establecidas las tareas que conforman la situación de aprendizaje, se procede a definir las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, esto se realiza para cada una de las tareas planteadas, considerando la experiencia previa con los estudiantes, errores comunes que suelen cometer en la resolución de ejercicios que involucran las razones trigonométricas, así como fenómenos identificados desde la teoría, como por ejemplo, el significado lineal de las razones trigonométricas reportado por Montiel (2012).

Finalmente se puso en práctica la situación didáctica propuesta por medio de la implementación de un taller, con docentes de matemáticas en el marco del RELME 34, el cual se llevó a cabo en forma virtual. En donde se analizó tanto la resolución de la situación didáctica, como la trayectoria hipotética planteada para la misma, a partir de dicha implementación se presentan los resultados del presente trabajo.

Sobre la situación de aprendizaje

Como ya se mencionó la situación de aprendizaje se enmarca en el contexto de la toma de una fotografía a una torre eólica, por lo que inicialmente se plantea la interrogante ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía, para obtener una imagen completa de la torre eólica? y como segundo interrogante se cuestiona si ¿Existe diferencia respecto de la distancia, si la fotografía se toma con dos celulares distintos? Ambas preguntas buscan generar un espacio donde el alumno se cuestione sobre la situación planteada desde su experiencia previa, pues si bien es cierto no todos los alumnos habrán intentado fotografiar una torre de estas, es probable que sí un objeto de gran dimensión. Posteriormente se toma en cuenta en la situación de aprendizaje un concepto propio de la fotografía como lo es el ángulo de visión de la cámara, el cual se refiere a la porción de lo que vemos por medio de la misma, es decir, lo que podemos captar en la fotografía que se desea tomar. Para la implementación de este concepto, se asumen algunas hipótesis adicionales, como por ejemplo que el celular se encuentra de manera vertical (perpendicular al suelo a cierta altura), por lo que su ángulo de visión se amplía o reduce de forma vertical (ver Figura 4). Además, de utilizar datos reales de dos dispositivos particulares un iPhone 11 con la cámara Ultra Wide con 120° de apertura y un iPhone 6S con una apertura de 60°.

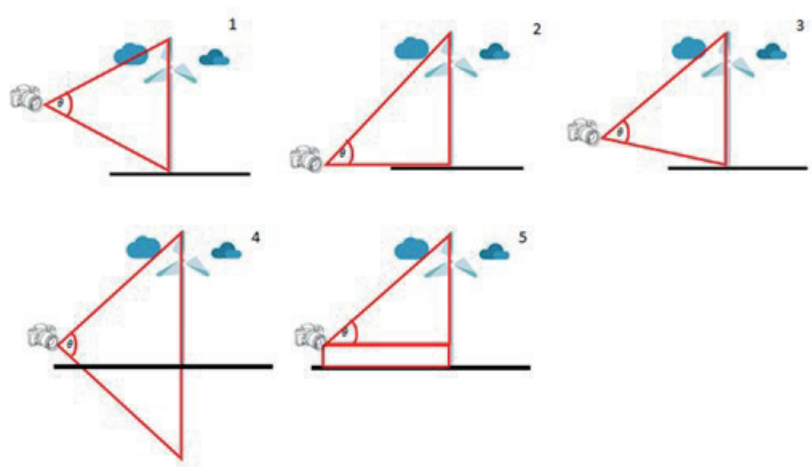
Figura 4. *Representación del ángulo de visión.*



Fuente: Elaboración propia.

Una vez implementado este concepto en la situación se solicita hacer un modelo de la situación, para lo cual la Figura 5 establece las hipótesis previas de las posibles respuestas por parte de los participantes.

Figura 5. *Hipótesis de la THA de los posibles modelos de la situación.*

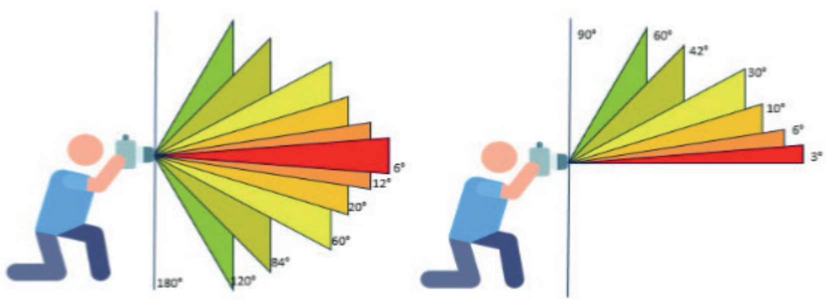


Fuente: Elaboración propia.

Ante tales posibles soluciones, la situación planteada en relación con el contexto cuestiona, ¿Si se modifica la altura en la que se coloca el celular, se podría reducir la distancia para tomar una fotografía completa de la torre? ¿Tendrá sentido ubicar el celular a más de 10 metros de altura, sin utilizar otros dispositivos o herramientas? Esto con la intencionalidad de que el estudiante descubra que existen restricciones asociadas al contexto, que pese a ser matemáticamente aceptables en el modelo, no son viables en el contexto de la situación.

Posteriormente se considera un caso particular del modelo realizado, al tomar una división del ángulo de apertura de la cámara (Figura 6), el cual se realiza con la intención de introducir un modelo geométrico asociado a la situación inicial, donde se puede reducir al considerar triángulos rectángulos.

Figura 6. *División del ángulo de apertura.*



Fuente: Elaboración propia.

La actividad se orienta a observar que, al cambiar la longitud del alguno de los catetos del triángulo rectángulo, también cambia la medida de dos de sus ángulos y la longitud de la hipotenusa. De modo que se busca encontrar algunas relaciones presentes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Es decir, se busca establecer si se presenta una relación de algún tipo, por ejemplo, proporcional, lineal o cuadrática. Finalmente, a partir de las proporciones encontradas en la tarea previa, las cuales relacionan las longitudes de los lados del triángulo y un ángulo en un triángulo rectángulo, se definen éstas como razones trigonométricas.

Resultados

Debido a que cada una de las tareas asignadas en la situación de aprendizaje se plantean con una intencionalidad particular, inicialmente se pretendía desafiar a los estudiantes por medio del interrogante ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía, para obtener una imagen completa de la torre eólica?, donde las respuestas esperadas dependen de la concepción del alumno sobre la situación presentada, ante lo cual las respuestas se pueden agrupar en los siguientes aspectos:

- Una distancia equivalente a la altura de la torre.
- Que la distancia depende del alcance de la cámara, la inclinación y altura de la misma.
- Se puede calcular la distancia mediante prueba y error, alejándose hasta lograr la foto deseada.

Por ejemplo, una de las respuestas de los participantes indica: “La distancia es relativa con respecto a la altura de la torre eólica, y la inclinación de la cámara del fotógrafo. Para mí es un estimado de 40 m”, lo cual coincide con las hipótesis planteadas para esta pregunta particular, dado que no todos los participantes descubren a priori las necesidades y requerimientos del planteamiento propuesto. Sin embargo, ninguno de los participantes identificó inicialmente la posibilidad de utilizar razones trigonométricas para establecer la distancia consultada.

Ante el cuestionamiento ¿Existe diferencia respecto a la distancia, si la fotografía se toma con dos celulares distintos?, el 40% de los participantes argumentan que existe diferencia dependiendo de las características del teléfono, mientras que el 40% no identifica diferencia y un 20% de los participantes indican que si la distancia es grande ambos dispositivos pueden tomar la fotografía a la misma distancia.

Por otra parte, al implementar el concepto de ángulo de visión, con los celulares iPhone 11 con la cámara Ultra Wide con 120° de apertura y iPhone 6s con una apertura de 60°, e indagar sobre la distancia a la cual se debería colocar cada uno de los celulares para tomar una fotografía completa de la torre, se obtienen diversas respuestas. Entre ellos, la tercera parte de las respuestas obtenidas corresponde a las del iPhone 11 como tiene un ángulo más amplio, la distancia es más corta, el de iPhone 6s con apertura de 60°, debe estar a una distancia más amplia, es decir, a mayor ángulo menor distancia, por otra parte, con una sexta parte de las respuestas se alude a falta de datos y con la misma cantidad de respuestas se incurre en el fenómeno identificado como significado lineal de las razones trigonométricas, donde se indica si se toma en cuenta que están a la misma altura y posición el IPhone 6s debería estar al doble de la distancia.

Por otra parte, se obtienen respuestas que no consideran diferencia al incorporar el concepto mencionado o incorporan distintas colocaciones para el celular de modo que la fotografía sería distinta, tal es el caso de colocar el teléfono en la base de la torre mirando hacia arriba (Figura 7).

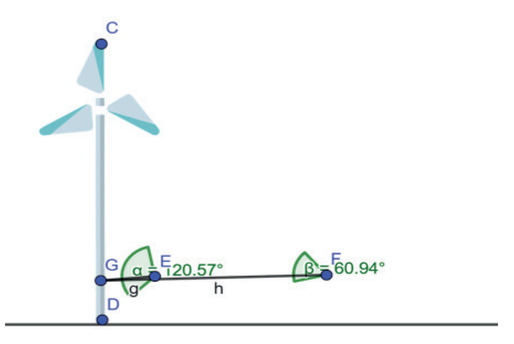
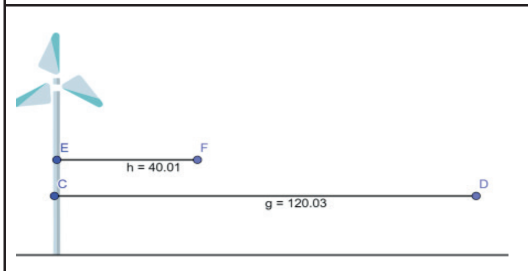
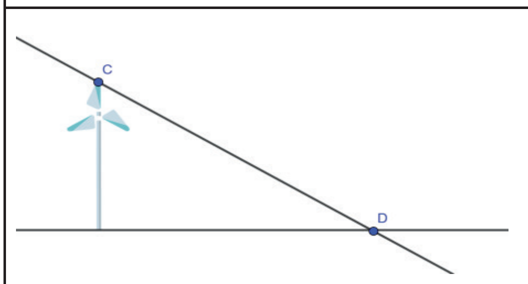
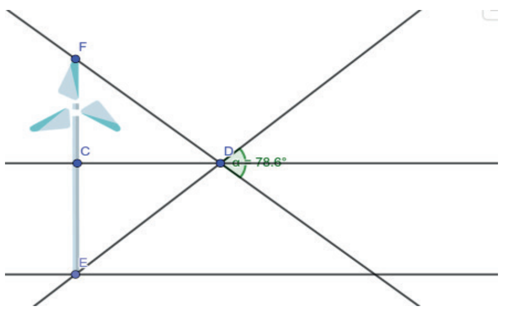
Figura 7. *Vista de la torre desde la base.*

Fuente: Elaboración propia.

Respecto de la construcción del modelo, cabe destacar que se implementó por medio del uso de la herramienta GeoGebra, donde los participantes del taller representan en un applet una distancia apropiada a la que se deba ubicar cada una de las cámaras de los celulares (iPhone 11 y iPhone 6s) para poder tomar la fotografía, conociendo que la torre eólica tiene una altura aproximada de 69.3 metros (desde la base hasta el punto más alto donde llegan las aspas).

La Tabla 1 resume los principales resultados obtenidos durante la implementación de la situación de aprendizaje.

Tabla 1. *Resultados obtenidos durante la aplicación de la situación de aprendizaje.*

Respuestas de los participantes	Descripción
	Respecto a este modelo consiste con una de las predicciones elaboradas en la Figura 4, donde se interpreta que hay una altura razonable para la ubicación del celular al tomar la fotografía.
	En este caso, pese a que no logra inferir el procedimiento realizado, los resultados obtenidos son consistentes con una de las hipótesis planteadas (ver Figura 4).
	En este caso, se puede apreciar que el modelo es consistente a una forma tradicional de resolver problemas con razones trigonométricas.
	En este caso, se deduce que quien realiza el modelo no considera la situación de manera integral, dado que se conoce que la altura de la torre es de 69,3m y por ende no es viable colocar el celular a la mitad de la altura de la misma, pues sin ayuda de algún instrumento una persona no alcanza dicha altura para tomar la foto.

Fuente: Elaboración propia.

Para la siguiente parte de la situación de aprendizaje, inicialmente la solución depende del modelo establecido en la pregunta anterior, sin embargo, en cualquier caso, se puede recurrir a identificar un triángulo rectángulo adecuado. Por lo que se procede a generalizar el modelo, donde los participantes desde el primer momento identifican que el celular con apertura de 60° debe colocarse más lejos de la base de la torre respecto al celular con apertura de 120°.

En la siguiente sección, la intencionalidad de una de las tareas corresponde a que los participantes lograran identificar que la relación en la situación planteada no es una relación lineal, ya que se buscaba que se evidenciará que si se duplica el ángulo la distancia no se duplica, con lo cual los participantes, lograron tal objetivo.

Otro aspecto a resaltar dentro de las intencionalidades de otra de las tareas es que se logrará evidenciar una relación entre el ángulo de inclinación y la longitud de la altura en un triángulo rectángulo, ya que esto sirve de puente para introducir que esa relación recibirá el nombre de razones trigonométricas.

Finalmente, al indagar sobre si los participantes encuentran alguna relación entre las longitudes de los lados y los ángulos de inclinación, se determina, que sí encuentran una relación con respuestas generales, como, por ejemplo: si, a la medida que aumenta el ángulo, aumenta la longitud del cateto opuesto (altura), pese a identificar alguna relación como la mencionada, ninguno de los participantes formalizó o vincula dicha relación con las razones trigonométricas.

Conclusiones

Al utilizar la trayectoria hipotética del aprendizaje (THA), el docente reflexiona y analiza sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde debe ser un actor activo del aprendizaje, pues no solo debe limitar su actividad a la de transmitir un contenido, sino que debe generar espacios donde el alumno, por medio de la actividad descubra nuevos conocimientos, basado en sus conocimientos previos y este debe ser un aprendizaje contextualizado.

La gran ventaja del ciclo que tiene la THA, es que se puede modificar en cada parte del mismo, por ende, se ve alimentado cada vez que se aplica, incluso el plan del docente puede cambiarse total o parcialmente. En la presente implementación, a partir de lo observado en el taller, se sigue que:

Primero, las hipótesis planteadas en cada una de las actividades se cumplieron, total o parcialmente, por lo que no es necesario incorporar nuevas hipótesis a esta trayectoria, salvo si se modificará el contexto para adaptarlo a una población en particular.

Por otro lado, se logró evidenciar la necesidad de predecir los posibles caminos que recorre cada uno de los estudiantes para llegar a adquirir un conocimiento, además del reto que significa para los docentes identificar que el alumno que recorre una trayectoria distinta a la pensada previamente no necesariamente significa que esté en algo incorrecto.

Este análisis nos permitió recorrer las distintas fases de la THA, aunado a los conocimientos trigonométricos de interés, ubicando la situación de aprendizaje en un contexto donde la actividad matemática no se limita a identificar un triángulo rectángulo, donde se busca un valor faltante, sino que se presenta con ayuda de la geometría una situación integral, donde se predicen algunos posibles caminos para el aprendizaje. Priorizando el análisis de la relación no lineal entre la cuerda y el ángulo, estudiada en un contexto particular.

Se resalta que los hallazgos en nuestra implementación, los participantes en su mayoría a través de las diversas tareas planteadas fueron estableciendo un mejor modelo de la situación, pues como se suponía, no todos desde un primer momento identificaron la presencia de un triángulo rectángulo donde poder aplicar las razones trigonométricas, esto a pesar de ser docentes de matemáticas y por ende se parte de la hipótesis que ellos deben conocer las razones trigonométricas básicas.

Finalmente, se destaca que este ciclo de aprendizaje apoyado por los resultados de investigación, brindan un espacio de análisis y reflexión sobre la práctica docente, sobre el ¿qué y cómo se enseña? Lo cual se considera muy valioso para desarrollar un proceso de enseñanza en relación con las razones trigonométricas y sería muy interesante aplicarlo en un entorno escolar.

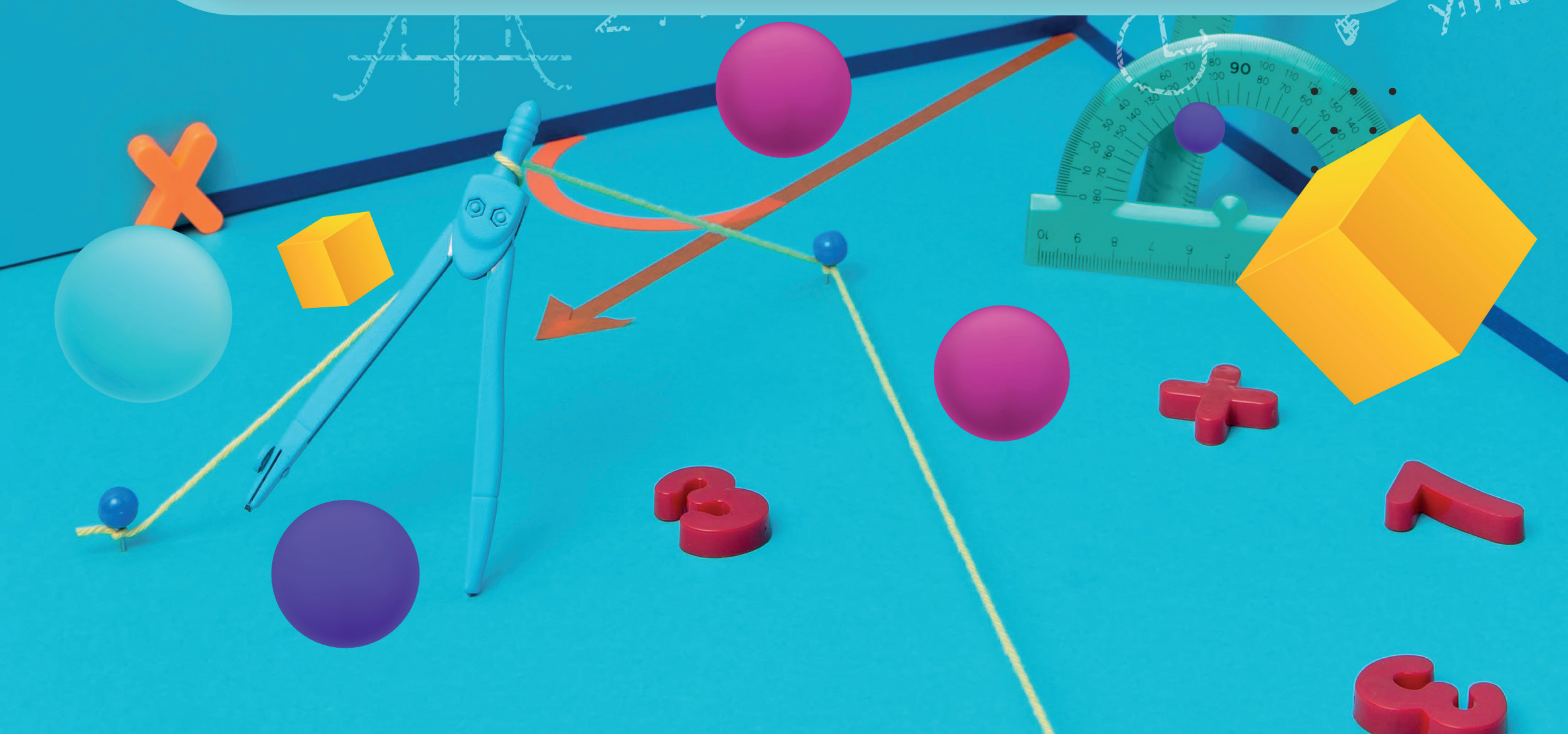
Referencias

Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(2), 79-98.
Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio de matemática. San José, Costa Rica: MEP
Montiel, G. (2012). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. Diaz desoci Santos.
Scholz, O. (2020). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico, en el tránsito de lo geométrico a lo variacional.* México DF (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional, México DF, México.
Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.
Simon, M. (2014). Hipotetical Learning Trayectories in Mathematics Education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-274). Netherlands: Springer.

SECCIÓN 6

WIPHALA

JUVENTUD CLAME



ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA. ELEMENTOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

ANALYSIS OF MIDDLE SCHOOL STUDEMTS' MATHEMATICS PRACTICE; ELEMENTS FOR BUILDING A RESEARCH PROBLEM

ANÁLISE DAS PRÁTICAS MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO. ELEMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PESQUISA

Santiago Cardona
Licenciado en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
Correo electrónico: santiago.cardona@udea.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6265-6449

Julián Ramírez
Licenciado en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
Correo electrónico: jdario.ramirez@udea.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6956-8321

Manuela Restrepo-Puerta
Licenciada en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
Correo electrónico: manuela.restrepop@udea.edu.co
Orcid: orcid.org/0000-0002-5343-2494

Mónica Marcela Parra-Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
Correo electrónico: monica.parra@udea.edu.co
Orcid: orcid.org/0000-0002-8844-0013

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar la construcción de un problema de investigación, el cual surge del análisis y las reflexiones de una serie de tareas propuestas en el primero de dos semestres de nuestra práctica pedagógica, en el marco de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Las tareas se analizaron a partir de un enfoque cualitativo de investigación y a la luz de la Actividad Matemática, bajo una perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. Los resultados dan cuenta de la importancia de proponer tareas a los estudiantes que movilicen sus prácticas matemáticas a partir de la interacción con otros y con el medio, con la intención de promover espacios en el aula en los cuales los estudiantes sean partícipes de su proceso de aprendizaje. Esto es el insumo para la consolidación del problema de investigación de nuestro trabajo de grado.

Palabras clave: Prácticas matemáticas, Actividad Matemática, Instrumentos, Conceptos cotidianos, Conceptos científicos.

Abstract

This paper aims to present a research problem building, which arises from the analysis and reflection on a set of tasks proposed in the first semester of our teaching practice in the framework of mathematics and physics degree at the Education Faculty of Antioquia University. The tasks were analyzed from a research qualitative approach and according to mathematical activity, under a cultural and historical perspective of mathematics education. The outcomes show the importance of providing students with tasks that mobilize their mathematical practice from the interaction with other students and with the environment, in order to foster classroom spaces in which the students are participants of their learning process. This is the essence to support the research problem of our degree work.

Keywords: Mathematical practices, Mathematical activity, Tools, Everyday concepts, Scientific concepts.

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar a construção de um problema de pesquisa, que decorre da análise e das reflexões de uma série de tarefas propostas no primeiro de dois semestres da nossa prática pedagógica, no âmbito da Licenciatura em Matemática e Física, da Faculdade de Educação da Universidade de Antioquia. As tarefas foram analisadas com base em uma abordagem de pesquisa qualitativa e à luz da Atividade Matemática, sob uma perspectiva histórico-cultural da Educação Matemática. Os resultados mostram a importância de propor tarefas aos estudantes que mobilizam suas práticas matemáticas a partir da interação com os outros e com o meio, com a intenção de promover espaços na sala de aula em que os alunos sejam participantes de seu processo de aprendizado. Esta é a entrada para a consolidação do problema de pesquisa do nosso trabalho de graduação.

Palavras-chave: Práticas matemáticas, Atividade Matemática, Instrumentos, Conceitos cotidianos, Conceitos científicos.

Introducción

El presente artículo[1] tiene como propósito presentar la consolidación de un problema de investigación, construido a partir de fundamentos empíricos y teóricos en un proceso de formación de pregrado. El proceso de formación se emprendió al interior de una práctica pedagógica en la Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia. La práctica pedagógica constó de tres semestres académicos (4 meses cada uno) y en el presente artículo reportamos el proceso de análisis del primero de ellos.

El proceso de investigación que develamos, se llevó a cabo en diferentes instituciones educativas del departamento de Antioquia-Colombia mediante el Proyecto *PROFE* (Programa de Fortalecimiento Educativo), para el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia, un convenio entre la Universidad de Antioquia y la Fundación Argos, desarrollado en el transcurso de los dos semestres del año 2018. El Proyecto nos planteó grandes retos a nivel personal y formativo, pues nos permitió acercarnos al ejercicio docente en diferentes lugares de nuestro departamento, permitiéndonos analizar las diversas maneras en que los estudiantes aprenden matemáticas en cada uno de los lugares a los que asistimos.

La observación de los ambientes de aula como un espacio social, de interacción y diálogo y los resultados de los análisis de los procesos llevados a cabo en el primer semestre de práctica pedagógica, nos permitieron consolidar un fundamento empírico y teórico en los que se apoyó nuestro problema de investigación y que fueron la base para construir la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?

Esta pregunta la presentamos también al final del artículo, acompañada de un objetivo de investigación, ya que ellos son el resultado del proceso que reporta el presente texto y no su orientación. Es por ello que las conclusiones de los análisis aquí expuestos desembocan en ella.

Las reflexiones se generaron en diálogo con referentes conceptuales de la literatura tales como Obando et al. (2014), con sus aportes a la teoría de la Actividad Matemática y su caracterización de las prácticas matemáticas, Radford (2006, 2014, 2018) en sus contribuciones a la comprensión del devenir de la perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática y para el entendimiento de la *interacción* en la *actividad,* esto junto a Jaramillo, Obando y Beltrán (2009). Por último, retomamos los aportes de Kozulin (2000) acerca de los conceptos cotidianos y científicos presentes en las prácticas matemáticas de los estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, este artículo está dirigido, principalmente, a quienes se encuentren en etapa de iniciación en el mundo de la investigación, pues los análisis que de aquí surgen podrán servirle como referencia para la construcción de su problema de investigación a partir del proceder en el aula (fundamento empírico) y del contraste con antecedentes teóricos (fundamento teórico). El lector encontrará aquí la primera etapa de la investigación desarrollada en nuestro trabajo de grado, por lo que puede entenderse como los primeros pasos investigativos y nuestras primeras aproximaciones a las reflexiones acerca de la Actividad matemática y las prácticas matemáticas de los estudiantes (Obando et al. 2014).

Para dar cuenta de este proceso de consolidación de un problema de investigación en Educación Matemática, presentamos este artículo en tres apartados. En el primero, presentamos los insumos centrales que fueron los antecedentes para la consolidación de nuestro problema de investigación, los fundamentos teóricos y empíricos;

[1]Los insumos teóricos, metodológicos y de análisis, presentados en este artículo, son producto del trabajo de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia de los tres primeros autores, asesorados por la cuarta autora.

su aparición en el artículo atiende a asuntos de escritura, pero ambos emergieron en conjunto en el desarrollo de la investigación. El fundamento teórico nos permitió hablar de la Actividad Matemática y de las prácticas matemáticas. Y el fundamento empírico, posibilitó el análisis de unas tareas propuestas a los estudiantes durante el primer semestre de práctica pedagógica. La conjunción de los elementos expuestos en el primer apartado nos permite presentar, en el segundo, la delimitación del problema de investigación, a partir de las reflexiones acerca del desarrollo de las tareas con los estudiantes. Por último, presentamos unas consideraciones finales donde concluimos los análisis, hacemos las últimas reflexiones y planteamos la pregunta de investigación surgida de esta primera etapa, la cual le abre camino a las próximas etapas de la investigación (las cuales serán reportadas en futuras publicaciones).

Fundamentos para construir un problema de investigación

Presentamos en este apartado los fundamentos teóricos y metodológicos, que se constituyeron en antecedentes de este proceso investigativo y que dan fundamento al análisis del proceso del primer semestre de práctica pedagógica y la posterior consolidación del problema de investigación. El proceso seguido en este artículo, podría servir de insumo para la consolidación de problemas en futuras investigaciones en el campo de la Educación Matemática.

◆ Fundamentos teóricos

Perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática

La perspectiva histórico-cultural (o socio-cultural) de la Educación Matemática engloba nuestro accionar investigativo, pues entendemos que el conocimiento matemático es una construcción de las personas a lo largo de su historia. Radford (2014) nos presenta aportes para comprender el surgimiento de esta perspectiva, la cual viene posicionándose, desde finales de siglo pasado, como una alternativa a la manera individualista generalizada de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Es el esfuerzo de diferentes investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a los intelectuales soviéticos de principios del siglo XX), actualizarlos y adaptarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Al respecto plantea:

Estos investigadores estaban interesados en entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno—un problema que todavía estamos luchando por entender y que está lejos de haber sido respondido de manera clara y definitiva (Radford, 2014, p. 133).

Esta perspectiva se preocupa por entender la Educación Matemática como un fenómeno social, cultural e histórico, donde el conocimiento matemático es el resultado de la acción humana en un contexto de prácticas particulares, con unas delimitaciones institucionales de acuerdo con una comunidad académica específica. Es decir, no se trata de que los estudiantes sean solo receptores ni que se apropien exactamente de los saberes construidos anteriormente, se trata de que sean hábiles con unas maneras de hacer y pensar en matemáticas a la vez que crean y aportan a ellas. Es por esto que nuestras prácticas pedagógicas y nuestra investigación se enriquecieron por esta perspectiva, pues ella generó diversas miradas y experiencias en los diferentes contextos en los que nos desenvolvimos y nos permitió reconocer saberes previos de los estudiantes poniéndolos en discusión, por medio de prácticas matemáticas (Obando et al., 2014), con saberes culturales.

Por otra parte, Kozulin (2000) presenta elementos importantes para el devenir histórico de la perspectiva sociocultural de la educación, nos aproxima a los aportes de Vygotsky acerca de los estudios socioculturales, a su interés por la relación entre el lenguaje humano y la conciencia y al desarrollo de los procesos mentales superiores (pensamiento verbal, memoria lógica, atención selectiva), los cuales se originan mediante la *actividad* cultural humana, es decir, de la acción al pensamiento. Este desarrollo de la idea de *actividad* en Vygotsky (y posteriores como Leontiev), como proceso colectivo y orientado, para la construcción de sentidos y significados es retomado por diversos autores en la actualidad para buscar comprender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Entre ellos encontramos a Obando et al. (2014), quienes hacen valiosos aportes para una teoría de la Actividad Matemática, los cuales presentamos en el siguiente componente.

Actividad matemática y prácticas matemáticas

Encontramos entonces, los aportes de Obando et al. (2014) a una teoría de la Actividad Matemática como un sustento importante para nuestro proceso de investigación, los cuales nos permiten comprender las prácticas matemáticas (y su movilización) de los estudiantes que participaron en esta investigación. En la figura I, vemos que la *actividad* se entiende como un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo educativo), pero además como un proceso colectivo en el cual la *interacción* con otros y con el medio y la reflexión de las propias prácticas, son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural.

***Figura 1:** Actividad Matemática.*

***Fuente:** Ramírez et al. (2021).*

El hacer con otros, orientado hacia un fin, es lo que permite la construcción de sentidos y significados, "la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros" (Jaramillo et al.2009, p. 9), es el proceso por el cual los sujetos se inscriben a la cultura a través de la *interacción* (Radford, 2018).

Las prácticas matemáticas que permiten evidenciar la manera cómo los sujetos se inscriben a la cultura se pueden caracterizar, en correspondencia con Obando et al. (2014), por

> los objetos de conocimientos con —y sobre los cuales se actúa— los conceptos que se enuncian sobre los mismos, los instrumentos para la acción, las técnicas que permiten tales instrumentos, los problemas, en tanto metas que orientan la acción, las formas de discursividad que permiten poner el hacer en el lenguaje —formas de decir, de escribir, de comunicar—, y finalmente el conjunto de visiones metamatemáticas [configuración epistémica] que permiten la toma de decisiones sobre el hacer —cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosóficas y ontológicas— (p. 83).

Estas características permiten mostrar, no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su Actividad Matemática, sino también, cómo sus transformaciones dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos. Es decir, la movilización (transformación) de las prácticas matemáticas es el aprendizaje.

En este artículo, nos centramos en analizar los *instrumentos* y los *conceptos* en el marco de la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Los *instrumentos* son un mediador entre las construcciones sociales y la apropiación que los individuos tengan de ellas, es decir, no son solo signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, pues de ser así “el lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos” (Radford, 2006, p. 113) y, por tanto, son también, las *maneras de leer el mundo* que se encuentran encarnadas en los objetos materiales y simbólicos.

Los *conceptos*, por su parte, son constructos simbólicos que traen consigo unas operaciones mentales y que son el producto de un proceso de generalización de atributos, pero también, y, sobre todo, un proceso de síntesis de dichos atributos que lo hacen situarse en relación con otros conceptos en una red sistemática (Obando et al., 2014, p. 76). Los *instrumentos* y los *conceptos* reflejados en las prácticas matemáticas de los estudiantes permiten evidenciar sus maneras de acercarse a los *objetos de conocimiento matemático*. Sus cambios repercuten en la movilización de los demás elementos constitutivos de las prácticas matemáticas, es decir, generan aprendizaje. Estos *conceptos* según Kozulin (2000) pueden ser *cotidianos* o *científicos.*

Conceptos cotidianos y científicos

Los *conceptos cotidianos* (Kozulin, 2000, p. 65) se encuentran ligados directamente con la experiencia de las personas en sus prácticas diarias (incluidas las prácticas académicas), son conceptos espontáneos que surgen de las reflexiones que los individuos hacen de sus prácticas cotidianas y de las generalizaciones producto de dichas reflexiones. Estos no aparecen comúnmente en el programa escolar, pero generan herramientas importantes para el entendimiento del mundo. Sin embargo, los conceptos cotidianos son limitados y carecen de sistematicidad, por lo que es importante la interrelación, a través de las prácticas matemáticas, con *conceptos científicos*, los cuales son avalados por una comunidad académica y presentan estructuras organizadas y jerárquicas. Estos son codificaciones culturales y construcciones históricas. Cuando nos referimos a conceptos científicos no hablamos solamente de aquellos que surgen directamente de una ciencia en específico, sino de aquellos que se caracterizan por poseer una estructura formal, lógica y descontextualizada.

La interrelación entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* genera una *tensión*, pues es un proceso de disputa y complemento que propicia una síntesis (en términos dialécticos), es decir, una constitución de nuevos conceptos matemáticos en las personas.

◆ Fundamentos empíricos

Camino metodológico y tareas propuestas

Las tareas aquí presentadas fueron fruto de un diálogo entre los requerimientos del Proyecto PROFE y de nuestros intereses como maestros en formación, es por ello que se presentan, por ejemplo, tareas relacionadas con los documentos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, pero a partir de nuestras propias perspectivas y experiencias.

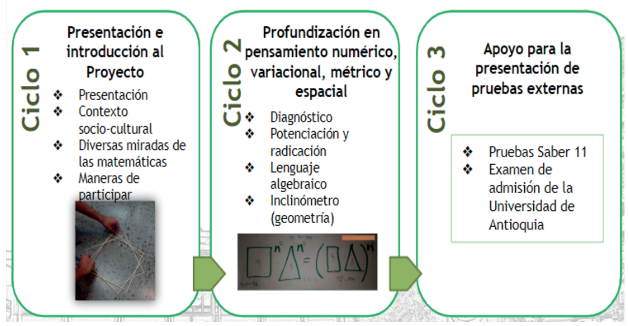
En esta etapa de la investigación, basados en un enfoque cualitativo, observamos, a través de relaciones dialógicas y comunicativas con los estudiantes, diferentes elementos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son problemáticos en términos investigativos, coherentes con la perspectiva educativa que asumimos y expusimos en el componente anterior.

El trabajo de investigación fue llevado a cabo en el transcurso del año 2018 con estudiantes de educación media (entre 15 y 18 años), en tres Instituciones Educativas diferentes ubicadas en dos municipios del departamento de Antioquia-Colombia, a saber: los municipios de Girardota-Antioquia y San Luis-Antioquia, en las que hicimos presencia los investigadores de manera separada, donde realizamos las mismas planeaciones para nuestras clases.

En este semestre construimos y ejecutamos planeaciones de clase que buscaron fortalecer en los estudiantes algunas competencias y pensamientos matemáticos propuestos por el MEN en los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (1998), los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (*2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas-Versión 2* (2016), a la vez que aportaron herramientas a los estudiantes para la presentación de las Pruebas Saber 11 (examen de Estado para finalización de ciclo escolar de educación media) y los exámenes de admisión a las universidades públicas de Medellín, Colombia (Universidad de Antioquia y Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín). Esto, dadas las condiciones del proyecto, el cual tenía como objetivos el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia y aportar elementos formativos que permitan a los estudiantes de educación media acceder a la educación superior en nuestro país.

Esta primera etapa de nuestro trabajo de investigación la desarrollamos en tres ciclos como se muestra en la Figura II:

***Figura 2**: Ciclos iniciales del primer semestre de práctica pedagógica.*



***Fuente:** Elaboración propia (2019).*

Los ciclos presentados en la Figura II, se desarrollaron de la siguiente manera:

Presentación e introducción al proyecto: dividido en tres sesiones de clase de dos horas cada una, en el cual presentamos el proyecto a los estudiantes participantes y propusimos tareas encaminadas a reconocer el contexto socio-cultural de los estudiantes, impulsar la creatividad a través del juego y fomentar la interacción en el aula de matemáticas.

Profundización en pensamiento numérico, variacional, métrico y espacial (MEN, 2006): dividido en varias sesiones de clase de dos horas cada una, en el cual profundizamos en los pensamientos numérico, variacional, métrico y espacial, con base en los documentos orientadores del currículo del área de matemáticas en Colombia. El pensamiento aleatorio también hace parte de los cinco pensamientos propuestos por el MEN (1998), pero no fue posible trabajarlo por falta de tiempo.

Presentación de pruebas externas: en el cual, apoyados en los ciclos anteriores, aportamos herramientas para la presentación de las Pruebas Saber 11 y los exámenes de admisión a las universidades públicas de Medellín

(Universidad de Antioquia y Universidad Nacional de Colombia). Este ciclo no fue objeto de estudio en nuestra investigación, por lo que omitiremos los detalles para efectos del presente artículo.

A continuación, presentamos algunos aspectos que se abordaron en cada uno de los ciclos y análisis sobre ellos, con un especial énfasis en las tareas que nos permitieron observar elementos esenciales en las prácticas matemáticas (Obando et al. 2014) de los estudiantes en el aula.

Análisis de las tareas

Presentamos a continuación cuatro episodios sucedidos en las tres instituciones educativas presentadas anteriormente, el análisis a los episodios nos permitió reflexionar acerca del devenir de la Actividad Matemática, las prácticas matemáticas de los estudiantes y de la presencia de los conceptos (cotidianos y científicos) y los *instrumentos* en algunas tareas propuestas, para así consolidar nuestro problema de investigación el cual redunda en la pregunta de investigación, que presentamos al final del artículo.

Iniciamos con una de las tareas del primer ciclo, donde los estudiantes resolvieron acertijos lógicos al usar palillos de madera. Continuamos con la primera tarea del segundo ciclo que consistió en problemas escritos con Números Racionales y ecuaciones lineales. Seguido a esto, presentamos una tarea del segundo ciclo donde se relacionan los conceptos cotidianos y los conceptos científicos para la construcción de *instrumentos* matemáticos. Por último, mostramos cómo la construcción de un instrumento de medida permitió poner en movimiento la Actividad Matemática, logrando el aprendizaje.

En el primer ciclo desarrollamos una tarea que permitió explorar diversas miradas de las matemáticas, la cual llamamos *Carrera de obstáculos lógicos*. Esta tarea consistió en cuatro acertijos lógicos que los estudiantes debían resolver con la ayuda de palillos de madera (ver figura III). La tarea implicaba la *interacción* permanente de los estudiantes, entre ellos y con materiales poco convencionales, en el aula de matemáticas. Las *interacciones* entre ellos se realizaron de manera colaborativa y orientadas a la solución del problema presentado, es decir, los estudiantes no solo hicieron cosas juntos, sino que fueron capaz de orientar su trabajo en equipo a la consecución de un objetivo. Es esto lo que Radford (2018) llama una *interacción* humana orientada por la *actividad* que permite un “proceso de inscripción del sujeto en la cultura” (p. 72).

Figura 3: *Juego lógico con palillos.*

Fuente: *Fotografía tomada por los autores (2018).*

Esta tarea nos permitió observar algunas relaciones que los estudiantes hicieron con su contexto y sus ocupaciones cotidianas a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas. Un ejemplo de ello, lo pudimos observar cuando uno de los estudiantes de una de las Instituciones Educativas, el cual trabaja a diario en un restaurante con su madre, resolvió de manera rápida un problema que implicaba el movimiento de figuras; al resolverlo argumentó que "lo he logrado fácilmente debido a que acomodo todos los días las mesas del restaurante de mi mamá y juego con las figuras que se forman al montar una mesa sobre otra" (Estudiante 1, entrevista, 23 de marzo de 2018).

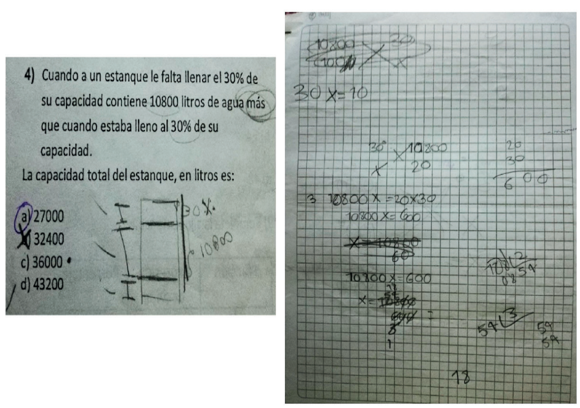
Este hecho nos permitió reflexionar acerca de cómo los estudiantes tejen relaciones dialécticas entre su contexto y los conceptos matemáticos, habilidades o pensamientos. Resaltamos que los *conceptos cotidianos*, que son producto de la práctica espontánea de las personas en su vida diaria, se constituyen en insumos para el devenir de la Actividad Matemática en el aula, y, por tanto, para la creación de condiciones necesarias para el aprendizaje. Este es un aspecto que profundizaremos en el desarrollo de las siguientes tareas.

Para el segundo ciclo, decidimos empezar con una tarea escrita donde abordamos ejercicios referentes a los pensamientos numérico y variacional (MEN, 1998), con la intención de explorar los diferentes *instrumentos* y *conceptos* que los estudiantes manifestaban acerca de estos dos pensamientos matemáticos. Los *objetos de conocimiento matemático* que se abordaron en esta tarea fueron los Números Racionales y las ecuaciones lineales a partir de diversos *problemas* planteados. Esta tarea permitió evidenciar varios aspectos problemáticos en las prácticas matemáticas de los estudiantes que pueden posibilitar múltiples investigaciones en Educación Matemática.

Con respecto a las prácticas matemáticas de los estudiantes, pudimos observar dos situaciones reiterativas:

No hay una conexión entre los contextos de las preguntas, los *conceptos* y los *instrumentos* asociados a estos, a partir de los cuales se puede abordar la solución de las preguntas; es decir, en algunas preguntas se evidencia (de manera oral o por medio de un gráfico) una comprensión de lo planteado, lo que quiere decir, en correspondencia con Obando et al. (2014), que se presentan unos *conceptos* construidos acerca del *objeto de conocimiento matemático,* pero no se presenta asociación con un determinado *instrumento* para encontrar su solución (ver figura IV).

***Figura 4**: Solución problema estanque de estudiante.*

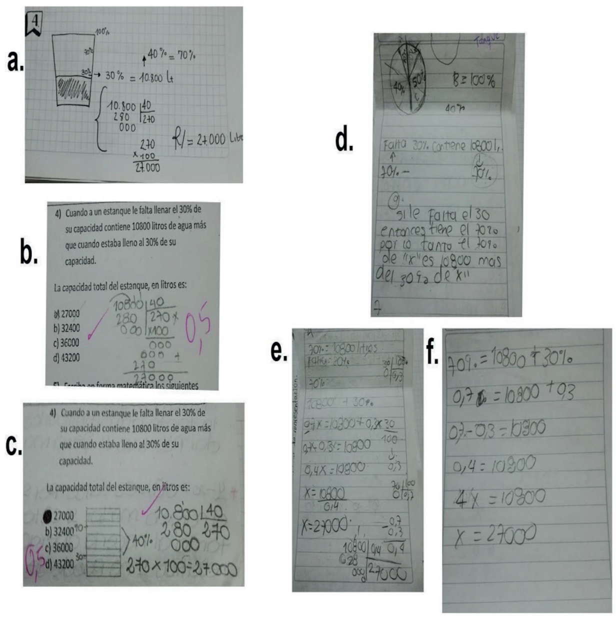


***Fuente:** Trabajo de los estudiantes (2018).*

En la Figura IV observamos, en la parte izquierda, que el estudiante logra realizar un diagrama que ilustra lo que el enunciado le plantea, es decir, puede presentar un *instrumento* asociado al *concepto* matemático donde se muestra una apropiación de construcciones sociales, pero a su vez, deja ver (en la parte derecha de la Figura IV) que no consigue hacer uso de unas maneras culturalmente codificadas de proceder en el área de matemáticas que le ayuden a darle solución a la situación que expone el enunciado. Esto deja ver la desconexión entre un *instrumento* para la acción en matemáticas y otro, o bien, que hay algunos *conceptos* construidos (lo que puede decirse del objeto) pero desconectados de unas técnicas e *instrumentos* que permitan materializarlos.

Los estudiantes utilizan diversas representaciones, símbolos y expresiones (*instrumentos)* para expresarse acerca de un mismo problema matemático y para llegar a su solución (ver Figura V).

Figura 5: *Distintas* maneras de solucionar problema estanque por diferentes estudiantes.

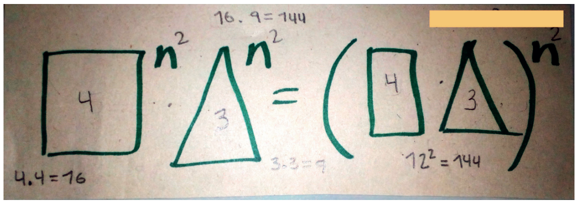


Fuente: *Trabajo de los estudiantes (2018).*

En este caso, observamos que al proponer a los estudiantes el mismo enunciado presentado en la Figura IV, representan de diferentes maneras la situación; es decir, utilizan distintos *instrumentos* (Obando et al., 2014) para plantear una posible solución. Así, en las Figuras V.a y V.c se presentan dos ilustraciones que intentan representar un estanque dividido en diferentes porciones a las cuales se les asigna un porcentaje determinado del que surge unas técnicas algebraicas, asociadas a *instrumentos,* que soluciona la situación, en particular en la Figura V.c observamos una representación de la fracción como relación parte-todo. Al mismo tiempo, en las Figuras V.d, V.e y V.f, podemos observar una representación que no intenta mostrar exactamente el estanque, sino que genera una relación de los porcentajes con respecto a un todo, donde se asocia además unas técnicas (asociadas a *instrumentos*) pertinentes. En la Figura V.b. los estudiantes representan la situación por medio del algoritmo de la división, sin necesidad de hacer una ilustración. En general, podemos decir que cada estudiante, de acuerdo con su acercamiento a unas maneras matemáticas de ver el mundo, se relaciona de un modo diferente con el saber, es decir, con los *objetos de conocimiento matemático*, lo que refleja los diferentes *conceptos* que los estudiantes han construido acerca de este.

Otra de las tareas trabajadas en el segundo ciclo tuvo que ver con dos objetos de conocimiento matemático, a saber, potenciación y radicación. Consistió, en un primer momento, en presentar a los estudiantes las propiedades de la potenciación y la radicación (saberes institucionales codificados culturalmente) escritas con un sistema de símbolos poco convencional en el caso de las matemáticas (ver Figura VI), y pedirles que, por medio de la búsqueda de valores numéricos otorgados a los símbolos presentados y del tanteo, determinaran la validez de las mismas y las excepciones que puedan tener. En un segundo momento, se les propuso a los estudiantes resolver dos ejercicios relacionados con las propiedades trabajadas.

Figura 6: *Tarea de los estudiantes al usar propiedades de la potenciación.*



Fuente: *Trabajo de los estudiantes (2018).*

Resaltamos, a partir de esta tarea, la importancia de realizar acciones en el aula donde se puedan establecer relaciones entre los conocimientos previos de los estudiantes (o *conceptos cotidianos*) y los saberes propios y sistemáticos del área (o *conceptos científicos*), pues ambos se complementan dialécticamente para construir una estructura conceptual clara y cambiante (Kozulin, 2000). Las propiedades de la potenciación y la radicación presentadas comúnmente como algo acabado que debe aprenderse de manera exacta, se convirtieron aquí en una construcción que los estudiantes hicieron al observar las características, excepciones y realizar generalizaciones de atributos que se sintetizaron en unos *instrumentos* (Obando et al., 2014).

Sin embargo, en el segundo momento de la tarea, cuando les propusimos ejercicios donde se utilizan estas propiedades construidas en el aula, no pudo evidenciarse una apropiación de estas propiedades como *instrumentos* que permiten la acción matemática, aun así, consideramos que la primera parte fue un aporte valioso para esto y lo que habría que hacer, es generar más tareas que permitan que esos *instrumentos* construidos cristalicen su experiencia con los *objetos de conocimiento,* a la vez que se conviertan en mediadores para el uso de los constructos sociales previos a la hora de enfrentar un *problema.*

La última tarea dentro de este ciclo, para abordar el pensamiento métrico y espacial, se denominó *El Inclinómetro* y se desarrolló en dos sesiones de clase. En la primera, se realizó la medición de una estructura, lo suficientemente alta (que requiriera más que uno o dos metros para medirla), por medio de herramientas no convencionales de medición como palos de escobas, hilos, zapatos, cordones, entre otros, encontrados en el aula o en la Institución. Esta sesión permitió reconocer los saberes de los estudiantes, ver y escuchar las ideas que tenían para darle solución a la situación y cómo entendían la medición relacionada con otros *objetos de conocimiento matemático* como la multiplicación.

El siguiente fragmento de entrevista nos permitió evidenciar estas ideas en una de las conversaciones que surgieron en esta sesión:

Entrevista personal: La medición de una altura tomado el día 31/05/2018.

Estudiante 1: de acá hasta arriba tiene treinta y siete adobes, ¿cierto? (señala el muro, Figura VII) ¿Qué pasa? que cada adobe mide diecinueve centímetros… lo que hicimos fue que multiplicamos los diecinueve centímetros por los treinta y siete adobes y entonces eso dio un resultado de setecientos veintiséis centímetros.

Estudiante 2: pero es contando también el separador que es de cemento, que mide tres centímetros.

Profesor: ¿y por qué multiplicaron?

Estudiante 3: porque no daba dividiendo ni sumando….

Profesor: ¿Qué es una multiplicación?

Estudiante 4: se dobla el resultado.

Estudiante 2: una multiplicación es (piensa un momento), cuando se cuenta de números en números, entonces, por ejemplo, dos por dos entonces se multiplica dos veces el dos... cuando está el dos y lo multiplica por el dos, entonces dos veces el dos le da cuatro, es eso, eso es una multiplicación…

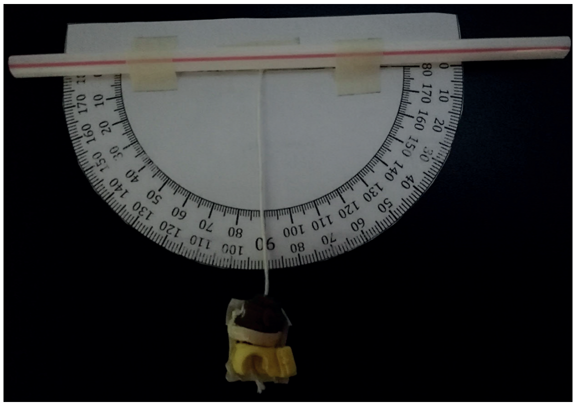
Figura 7: *Medición de la altura de una estructura por estudiantes.*

Fuente: *Fotografía tomada por los autores (2018).*

En la figura VII, observamos dos de las estudiantes que se encontraban explicando cuál había sido el proceso para la medición de uno de los muros de la Institución. Previo a esto, las estudiantes habían discutido cuáles herramientas tenían a su alcance y cuáles estructuras podían medir con estas, y por tal motivo, decidieron elegir el muro. En el fragmento escrito con anterioridad, indagamos para comprender la solución que abordaron las estudiantes frente a esta situación y, se infiere de sus respuestas, que las estudiantes hicieron propios algunos *conceptos* e *instrumentos* matemáticos y los utilizaron en la tarea para facilitar una medición inicialmente tediosa.

En la sesión siguiente, al continuar con la tarea, los estudiantes realizaron la medición de la misma estructura, pero ahora con una herramienta de medición denominada *inclinómetro*. Esta herramienta fue construida conjuntamente en el aula con la ayuda de materiales de fácil acceso como transportador impreso, pitillos, hilo y cinta (ver Figura VIII). El desarrollo de esta tarea permitió observar la manera cómo se movilizaron las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que ponen en *tensión* sus *conceptos cotidiano*s con unos *conceptos científicos* propios del área. En este caso, la medición como un proceso propio de la cotidianidad, pero también como un proceso exacto, sistemático y cultural, permite el encuentro individuo-sociedad y pone en movimiento la Actividad Matemática (Obando et al., 2014).

Figura 8: *Inclinómetro.*



Fuente: *Fotografía tomada por los autores (2018).*

El uso del *inclinómetro*, al ser un *instrumento* que trae consigo saberes matemáticos propios del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (MEN, 1998) propicia que los estudiantes se acerquen a ellos de una manera horizontal, es decir, no miran el conocimiento hacia arriba como algo que se debe alcanzar, sino como algo que se construye por medio de la *interacción*, con el *instrumento*, con sus pares y con el medio (Radford, 2018).

Delimitación del problema de investigación

Presentamos en este apartado la delimitación del problema de investigación como producto de las relaciones entre los fundamentos empíricos y teóricos expuestos en el apartado anterior.

Como mencionamos antes, la práctica pedagógica que reportamos en este artículo se desarrolló en tres semestres académicos, aquí analizamos el proceso vivido durante el primer semestre. El primer semestre de nuestra práctica pedagógica se constituyó en la primera etapa de nuestra investigación, pues fue el momento donde construimos el problema a investigar a partir de nuestra experiencia docente en el Proyecto PROFE.

Consolidamos el problema de investigación, el cual presentamos a continuación, así como su pertinencia en el campo de la Educación Matemática, y lo delimitamos después con una pregunta y un objetivo de investigación. En este sentido, el problema se delimitó desde lo teórico y lo empírico a partir de 7 elementos centrales:

En primer lugar, evidenciamos una falta de conexión, en las prácticas matemáticas de los estudiantes, entre los conceptos y los procedimientos. En segundo lugar, observamos que los estudiantes hacen uso de diversas representaciones para referirse a un concepto matemático. En tercer lugar, notamos la presencia de una dificultad para relacionar los conceptos matemáticos con la cotidianidad. En cuarto lugar, el hecho de poner en juego los conceptos cotidianos de los estudiantes con los conceptos científicos del área por medio de una tarea, genera un detonante importante para el aprendizaje. En quinto lugar, las tareas se entendieron de manera aislada, no se logra ver un hilo conductor. En sexto lugar, el enfrentamiento a problemas de la vida cotidiana como la medición es un gran movilizador de la Actividad Matemática, donde la interacción juega un papel fundamental. Por último, el uso de instrumentos como el *inclinómetro* permitió develar conceptos matemáticos implícitos en él.

El análisis de las tareas iniciales desarrolladas en el primer semestre de práctica pedagógica, abrió el camino a nuestro proceso de investigación, y generó, como aporte a la Educación Matemática, diferentes reflexiones acerca del tipo de tareas que se pueden desarrollar en el aula de matemáticas, dirigidas a la movilización de las prácticas matemáticas (Obando et al., 2014) de los estudiantes y por ende, al desarrollo de la Actividad Matemática orientada por un objeto/motivo educativo que permita el acercamiento de los estudiantes a maneras culturalmente codificadas (o *conceptos científicos*) de pensar en matemáticas (Kozulin, 2000). Todo esto a partir, también, de los *conceptos cotidianos* que los estudiantes han construido de sus reflexiones vivenciales diarias, sean estas en la calle, la casa o la escuela.

La *interacción* juega un papel principal en el devenir de la Actividad Matemática, pues es fundamental para la construcción de sentidos y significados, es el contacto permanente con los demás y con el medio y según Obando et al. (2014), son fundamentales para la movilización (transformación) de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural. Es por este motivo, que las tareas que se proponen a los estudiantes no deben ser aquellas en donde ellos sean únicamente receptores de conocimientos, sino donde sean partícipes de su construcción en la *actividad* con otros.

Así, a partir de lo expuesto en este artículo y de las conclusiones derivadas de los análisis de nuestra primera etapa de investigación, nuestro objeto de estudio lo encontramos entonces en las prácticas matemáticas (Obando et al., 2014) de los estudiantes, más específicamente en las relaciones entre los conceptos matemáticos, los instrumentos y procedimientos, y sus saberes cotidianos. Y a partir de ello fue posible proponer como pregunta orientadora de la investigación: *¿De qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?* En correspondencia el objetivo general que orientó las siguientes etapas de nuestra investigación fue: *Analizar la manera cómo se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales.* En síntesis, nuestro problema de investigación involucró el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, de manera más precisa, de los conceptos cotidianos y científicos que se pusieron en juego en dichas prácticas y de los instrumentos y procedimientos que usaron.

La discusión en torno a los elementos que se constituyeron en respuesta a esta pregunta y al alcance del objetivo esperamos sean publicados y difundidos posteriormente en otros espacios.

Consideraciones finales

Presentamos en este apartado algunas consideraciones finales en torno a las prácticas matemáticas de los estudiantes y al proceso de construcción del problema de investigación.

El diálogo de los fundamentos teóricos y empíricos fue un detonante (hecho que desencadenó acciones) para el desarrollo del proyecto de investigación, pues permitió generar motivación, cuestionamientos y miradas diferentes de las matemáticas (entendiéndolas como algo más que procedimientos ahistóricos e inmóviles) y en esta medida se convirtieron en elementos centrales para la caracterización de nuestro problema de investigación gracias a los análisis que de allí surgieron.

A partir de las reflexiones de las tareas iniciales presentadas en este artículo, reconocimos la importancia de proponer tareas a los estudiantes que movilicen sus prácticas matemáticas a partir de la interacción con otros y con el medio. A la vez, estas reflexiones nos permitieron generar nuestro problema de investigación, el cual involucró el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, de manera más precisa, de los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* que se pusieron en juego en dichas prácticas y de los *instrumentos* y procedimientos que usaron. Todo esto, en el marco de los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático, pues en el contacto con los estudiantes durante el primer semestre de práctica (primer etapa de la investigación) reconocimos la importancia que estos tienen para la vida cotidiana y académica de las personas ya que, en coherencia con Obando (2003, p. 158), permiten analizar y darle significado a grandes volúmenes de información cuantificada en términos de porcentaje, probabilidad, razones, fracciones, entre otros. De igual manera, son de gran importancia en los procesos escolares, pues se constituyen como una base fundamental para la formación en otras disciplinas de la ciencia.

En términos de la construcción de un problema de investigación para la formación inicial de profesores investigadores en Educación Matemática, consideramos que, aunque es un proceso complejo, es fundamental analizar las acciones que se llevan en el aula en diálogo con los insumos teóricos en pro del enriquecimiento de ambos espacios.

Referencias

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (8 a 10 de octubre de 2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. En *Décimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de aprendizaje V2 en Matemáticas.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema, 8*(2), 157-182.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3*(20), 72-90.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132- 150.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA, 12*(2), 61-80.

Ramírez, J. D. R., Restrepo-Puerta, M., Arenas, S. C. y Parra-Zapata, M. M. (2021). Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un ambiente de aprendizaje con números racionales. *Revista Ciencias y Humanidades, 12*(12), 202-225.

DEL SABER AL CONOCIMIENTO EN LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA. EL CASO DEL RECTÁNGULO

FROM KNOWING TO KNOWLEDGE IN ELABORATION OF SIMULATORS BY USING GEOGEBRA. THE RECTANGLE CASE

DO SABER AO CONHECIMENTO NA ELABORAÇÃO DE SIMULADORES COM O GEOGEBRA. O CASO DO RETÂNGULO

Stephanie Díaz-Urdaneta

Asociación Aprender en Red. Maracaibo, Venezuela.

stephaniediazurdaneta@gmail.com

https://orcid.org/0000-0002-8335-2022

Resumen

Este artículo presenta y analiza diferentes procesos de construcción geométrica asumidos por estudiantes y profesores de matemáticas para representar rectángulos en actividades de elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG). Como referente teórico, se adoptó la relación entre los conceptos de saber, labor conjunta y conocimiento propuestos por la teoría de la objetivación. Los datos de la investigación fueron analizados desde una perspectiva cualitativa y se obtuvieron tanto de documentos de sistematización que estudiantes y profesores prepararon para comunicar su trabajo en la ESG, como de los archivos ggb. de los simuladores elaborados. Los resultados del estudio permitieron identificar tres clases de tareas matemáticas según los elementos utilizados en la construcción de los rectángulos, que ayudaron a describir las técnicas de construcción empleadas para tal fin. Las conclusiones de la investigación apuntan hacia la influencia que los sujetos participantes de la ESG tienen sobre el modo cómo las actividades de construcción geométrica se desarrollan, y hacia la influencia que los artefactos utilizados ejercen sobre el despliegue y los resultados de tales actividades.

Palabras clave: Saber, Conocimiento, Actividad, Elaboración de Simuladores, GeoGebra

Abstract

This paper presents and analyses different geometric construction processes faced by mathematics students and teachers to represent rectangles in activities for elaborating simulators by using GeoGebra (ESG). As the theoretical reference, it adopted the relationship among the concepts of knowing, the joint work, and knowledge proposed by the theory of objectification. The research data were analyzed from a qualitative perspective, being obtained from both, systematization documents prepared by teachers and students to communicate their work in ESG and ggb files. The findings allowed identifying three types of mathematical tasks according to the elements used in rectangle constructions, which helped to describe the construction techniques used with this aim in mind. The conclusions point towards the influence that ESG participant subjects have on the way geometric construction activities are developed, and towards the influence the used artifacts have on the display and results of such activities, as well.

Keywords: Knowing, Knowledge, Activity, Elaboration of Simulators, GeoGebra.

Resumo

Este artigo apresenta e analisa diferentes processos de construção geométrica adoptados por estudantes e professores de matemática para representarem retângulos em atividades de elaboração de simuladores com o GeoGebra (ESG). Como referencial teórico, adoptou-se a ligação entre os conceitos de saber, labor conjunto e conhecimento propostos pela teoria da objetivação. Os dados da pesquisa foram analisados desde uma perspectiva qualitativa e se obtiveram tanto de documentos de sistematização que estudantes e professores prepararam para comunicar o trabalho deles na ESG, quanto dos arquivos ggb. dos simuladores elaborados. Os resultados do estudo permitiram identificar três classes de tarefas matemáticas segundo os elementos utilizados na construção dos retângulos, que ajudaram a descrever as técnicas de construção empregadas para essa finalidade. As conclusões da pesquisa focalizam-se na influência que os sujeitos participantes da ESG têm sobre o modo como as atividades de construção geométrica se desenvolvem, e na influência que os artefatos utilizados exercem sobre o desdobramento e os resultados de essas atividades.

Palavras chave: Saber, Conhecimento, Atividade, Elaboração de Simuladores, GeoGebra.

Introducción

Durante los años 2013 y 2018, la Asociación Aprender en Red impulsó y llevó a cabo en diferentes instituciones educativas públicas de Venezuela una iniciativa denominada *Proyecto Club GeoGebra* (en adelante, PCG) (Sánchez-Noroño et al., 2020). Como su nombre lo sugiere, el PCG funcionaba en dichas instituciones escolares como espacios educativos no convencionales denominados *Clubes GeoGebra* (en adelante, CGGs), que tenían por denominador común el uso del software GeoGebra con propósitos educativos. Estos espacios eran conformados por estudiantes liceístas (12 y 17 años) y por al menos un profesor de matemáticas, quien se encargaba de guiar las diferentes actividades que se desarrollaban en el seno de estos clubes. En general, los participantes de un CGG se dedicaban a la *Elaboración de Simuladores con GeoGebra* (en adelante, ESG), esto es, un conjunto de actividades creadas con el propósito de promover aprendizaje geométrico en los estudiantes del proyecto, e impulsadas por dos objetos (Sánchez-Noroño et al., 2020):

1. La producción de dibujos dinámicos con el GeoGebra (Borba et al., 2018);
2. La comprensión de los procesos de producción de estos dibujos.

Investigaciones previas (Castillo et al., 2020; Díaz-Urdaneta y Pereira, 2020; Prieto G. et al., 2020; Sánchez-Noroño et al., 2020; Sánchez S. y Prieto G., 2019) han revelado que las actividades realizadas por estudiantes y profesores en la ESG constituyen oportunidades significativas para aprender los saberes geométricos presentes en la enseñanza de las matemáticas escolares, mediante la construcción de un conjunto de dibujos dinámicos con el software GeoGebra que permiten representar un "fenómeno de la realidad" (Prieto G. y Gutiérrez, 2015, 2016, 2017) de interés para los estudiantes de los CGGs. Sánchez-Noroño et al. (2020) llaman a ese conjunto un *simulador con GeoGebra*.

La actividad específica de la ESG en la que estudiantes y profesores se dedican a construir los dibujos dinámicos que componen al simulador es el *trabajo matemático* (Gutiérrez et al., 2017), el cual era puesto en marcha a través de la resolución de una serie de *tareas de construcción*. A pesar de que la atención a este tipo de tarea era un aspecto común para todos los CGGs que hacían parte del proyecto, y de que cada trabajo matemático era único e irrepetible en el tiempo, las experiencias de ESG reportadas en la investigación revelaban la existencia de similitudes en los procesos de resolución de tareas de construcción que estudiantes y profesores adoptaban cuando construían un mismo objeto geométrico, tanto en diferentes CGGs como en diferentes simuladores.

Bajo este contexto, este artículo analiza el procedimiento de construcción del rectángulo (como objeto geométrico) en un grupo de simuladores elaborados con el software GeoGebra, destacando las similitudes entre ellos, especialmente en aquellos que fueron elaborados en un mismo CGG. Para realizar este análisis, se tomará como referente teórico la relación entre los conceptos de saber, labor conjunta y conocimiento propuestos por la Teoría de la Objetivación (en adelante, TO) (Radford, 2021), por tratarse de conceptos que ofrecen un marco para comprender mejor los vínculos entre los diferentes procedimientos de construcción de rectángulos en actividades de ESG. De este modo, en el siguiente subapartado se teorizarán estos tres conceptos, según la TO.

Saber, labor conjunta y conocimiento según la TO

Al contrario de otras perspectivas que teorizan sobre la enseñanza y el aprendizaje (de las matemáticas) en contextos educativos, la TO propone una diferencia entre las ideas de saber y conocimiento. Al respecto, Radford

(2013, 2017b) sugiere concebir al saber no como aquello que el estudiante construye por su propia cuenta y que se constituye en el resultado de su experiencia particular. En lugar de ello, el autor propone teorizar al saber como una potencialidad que emerge de la actividad humana y que se concreta en conocimiento a través de ella. Cuando se refiere al saber como potencialidad, el autor busca enfatizar que el saber es un ente abstracto posible de ser materializado en una o varias acciones. Uno de los ejemplos que él utiliza para mostrar la idea del saber como potencialidad tiene que ver con el sonido que un determinado instrumento musical emite al ser tocado: el sonido es algo indefinido, es decir, una potencialidad que se concreta o se materializa cuando el instrumento es tocado en un evento determinado, situado en el tiempo y en el espacio.

A pesar de que representa una mera potencialidad, el saber no se encuentra aislado del trabajo humano en tanto que éste se constituye por los propios individuos a través de sus propias acciones, reflexiones, sufrimientos y esperanzas (Radford, 2017b). Así, el carácter potencial del saber representa un conjunto de posibilidades que han sido compuestas por las acciones y los artefactos involucrados en la actividad humana, constituidos histórica y culturalmente (Radford, 2014). De allí que el saber es “un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente (...) [movilizado en la actividad humana] a través del cuerpo, los sentidos humanos y del uso de objetos físicos y artefactos culturales” (Radford, 2017b, p. 101, énfasis en el original). Por su parte, el conocimiento es entendido como una materialización y/o manifestación concreta del saber (Radford, 2013, 2017b).

Como es posible notar en las líneas anteriores, el proceso a través del cual se materializa el saber es la actividad humana. En otras palabras, la actividad es el medio entre el saber y el conocimiento. Para Radford (2017b, p. 111), la actividad es considerada como “(...) una actividad conjunta que toma su forma de las formas materiales, espirituales, históricas y culturales de producción y modos de interacción social. No es solamente una secuencia de acciones individuales que ocurren durante la interacción”.

De acuerdo con la concepción que la TO ofrece de éstos, los conceptos de saber, conocimiento y actividad están íntimamente relacionados entre sí. En efecto, al establecer una conexión entre estos tres conceptos, Radford (2017b) sostiene que:

> […] el conocimiento es un modo del saber: una de sus formas singulares desarrolladas. Esta forma desarrollada que la actividad mediadora hace posible, pone al saber en movimiento y lo actualiza o materializa. El saber (algebraico, geométrico, etc.) no es un ente sensible en sí. ¿Podemos acaso sentir, percibir o pensar el álgebra en sí? No. No podemos. Pensar algebraicamente es ya algo que ocurre en ese proceso que hemos llamado hace un momento actividad. Y lo que se está revelando a la conciencia en el curso de esa actividad no es el saber algebraico entero, sino una forma singular desarrollada: su materialización o actualización, esto es, el conocimiento. Solamente como tal, como conocimiento, el saber puede ser un objeto sensible de pensamiento y como tal ser modificado y ampliado. (p. 109)

Cabe destacar que el concepto de actividad asumido por la TO se fundamenta en la filosofía del materialismo dialéctico, desde la cual se asume que la actividad es esencialmente social y una forma de vida en sí misma (Radford, 2018). Es así como la TO toma esa concepción dialéctico-materialista de la actividad para proponer un concepto de esta categoría ajustado al aula de matemáticas, denominado *labor conjunta*. Para Radford (2017a), la labor conjunta es una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la que estudiantes y profesores se empeñan en conjunto, intelectual y emocionalmente, para producir una obra común (para una mayor profundización del concepto de labor conjunta, véase Radford, 2019).

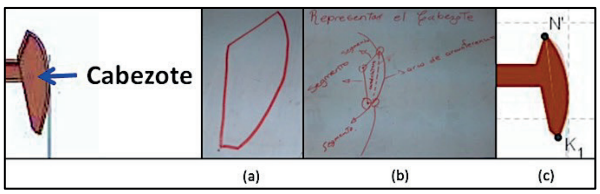
Teniendo en cuenta lo expuesto, en el siguiente subapartado se realizará una descripción de cómo los conceptos de saber, labor conjunta y conocimiento son entendidos cuando estudiantes y profesores participan en actividades de ESG (en adelante, se asumirá que las actividades de ESG serán aquellas que se orientan hacia la producción de dibujos dinámicos con el software GeoGebra).

Saber, labor conjunta y conocimiento en actividades de ESG

El primer paso que los estudiantes de un CGG debían realizar para iniciar la elaboración de un simulador con GeoGebra consistía en la selección del fenómeno a simular. Luego de esta selección, los aprendices y su profesor de matemáticas se dedicaban a resolver de forma iterada una serie de tareas de simulación, vinculadas a la representación en el software de cada parte identificada del fenómeno (Rubio et al., 2016). La resolución de cada tarea de simulación suponía para estos sujetos llevar a cabo las siguientes acciones (Díaz-Urdaneta y Prieto G., 2016):

a) Elaborar un boceto de la parte del fenómeno que se deseaba representar en la interfaz del software (ver Figura 1a).
b) Identificar las formas geométricas inmersas en el boceto (ver Figura 1b).
c) Representar tales formas geométricas en la interfaz del GeoGebra (ver Figura 1c).

Figura 1. Ejemplo de resolución de una tarea de simulación en Díaz-Urdaneta y Prieto (2016)



Para representar cada forma geométrica en la interfaz del GeoGebra, los estudiantes y su profesor se dedicaban a resolver una tarea de construcción correspondiente. Durante el proceso de resolución de estas tareas, los saberes geométricos inherentes a la situación matemática abordad eran movilizados por los participantes. En términos de la TO, la materialización de estos saberes se concretaba cuando la tarea de construcción era resuelta, es decir, cuando la figura geométrica era construida en la interfaz del software. De esta forma, era posible aproximarse al conocimiento que estudiantes y profesores tenían de la figura geométrica representada, por medio del protocolo de construcción ofrecido por el software y de la sistematización de la experiencia del trabajo matemático empleado por ellos. En otras palabras, el conocimiento materializado por estudiantes y profesores en actividades de ESG se puede ver reflejado en la técnica de construcción (en adelante, técnica) que estos sujetos empleaban para resolver las tareas. De acuerdo con Sánchez-Noroño y Prieto G. (2017), la técnica de construcción es el proceso que se aplica para resolver una tarea de construcción geométrica, mediante el uso de las herramientas y funcionalidades dinámicas del GeoGebra. Dicha técnica también se encuentra bajo la influencia del contexto, en la medida en que el saber movilizado emerge en la construcción de la figura geométrica durante el desarrollo de la labor conjunta de estudiantes y profesores, lo que involucra tanto el uso de los artefactos como las interacciones sociales surgidas en ella.

Un ejemplo de materialización de saberes geométricos en actividades de ESG puede verse en la resolución de tareas referidas a la construcción de rectángulos. Al respecto, una tarea vinculada a la construcción de rectángulos en la interfaz del GeoGebra, en situación de ESG, puede ser enunciada en los siguientes términos: construir un rectángulo a partir de uno de sus vértices. En atención a la estructura de esta tarea, es posible reconocer la conceptualidad del rectángulo como el saber geométrico que estará próximo a materializarse. De hecho, en la construcción de esta figura geométrica se encuentran aquellas “(...) formas materiales, espirituales, históricas y culturales de producción y modos de interacción social” (Radford, 2017b, p. 111) que ejercen influencian en la producción y aplicación de la técnica del rectángulo, ya que es en ese momento donde los materiales, las ideas que se tienen sobre el rectángulo y las interacciones sociales entre los sujetos se articulan para lograr la construcción de la figura.

En atención a lo anterior, es posible reconocer en cada paso que compone la técnica empleada aquellas ideas que surgen del saber referido al rectángulo, esto es, el conocimiento (Radford, 2017b) que estudiantes y profesores poseen sobre el rectángulo como objeto geométrico. Así pues, en virtud de los vínculos que existen entre la técnica y el saber movilizado en la labor conjunta, se asume que dicha técnica es portadora de un contenido conceptual que presenta una perspectiva del objeto geométrico (en el ejemplo, el rectángulo) basado en su construcción (Sánchez y Prieto, 2019).

Para efectos de esta investigación, serán reportadas diferentes modos en los que un rectángulo fue construido con el software GeoGebra, donde cada modo da cuenta de un conocimiento particular relacionado a esa figura geométrica. En la figura 2 se muestra un diagrama que muestra: (i) el saber considerado en este estudio, referido al rectángulo; (ii) la labor conjunta mediadora en la que ese saber se pone de manifiesto, que es la construcción del rectángulo; y (iii) el conocimiento, que es reconocido en la técnica empleada para la construcción de los rectángulos.

Figura 2. Mediación entre saber y conocimiento referido al rectángulo en la ESG

Metodología

La metodología adoptada en este trabajo está referida a la investigación de corte cualitativo, la cual considera al sujeto como parte del proceso, ya sea que éste se encuentre solo o junto a otros seres y los respectivos materiales que forman parte de su contexto (Bicudo, 2012). Sobre este tipo de investigaciones, se pueden destacar ciertas características, entre ellas:

- El objeto de estudio está situado en un contexto (Bicudo, 2005);
- La investigación permite hacer comprensiones e interpretaciones sobre este objeto (Bicudo, 2012).

Según Bicudo (2012), estas cuestiones permiten observar ciertas categorías sobre el objeto estudiado, lo que ayuda a dirigir el estudio por medio de éstas. Sin embargo, la autora sostiene que tales categorías hacen que los datos trabajados no siempre se puedan generalizar o transferir para otros contextos, pero que ofrecen oportunidades para la caracterización, la comprensión y la interpretación del objeto de estudio.

4.1. Contexto

La información analizada en esta investigación fue obtenida de las actividades de ESG de tres CGGs que funcionaron en tres instituciones escolares de Venezuela, desde octubre de 2015 hasta junio de 2016. En el primer club, denominado como *CGG A*, participaron cuatro estudiantes y se elaboraron tres simuladores en los que se construyó un rectángulo en cada uno. En el segundo club, referido como *CGG B*, participaron dos estudiantes y se elaboraron dos simuladores en los que se construyeron cuatro rectángulos (dos en cada uno). En el tercer club, etiquetado como *CGG C*, participó un único estudiante, quien construyó un rectángulo en su simulador. Por su parte, en este contexto participaron dos profesores de matemáticas: uno de ellos encargado de *CGG A* y *CGG B*, mientras que el otro estuvo a cargo de *CGG C*. En síntesis, el contexto de la investigación está conformado por la participación de siete estudiantes y de dos profesores de matemáticas, quienes elaboraron seis simuladores en los que se construyeron ocho rectángulos, según la distribución que se muestra en el cuadro 1:

***Cuadro 1**. Número de rectángulos construidos por simulador y participantes.*

Club GeoGebra (CGG)	Simulador (CCGS#)	Rectángulos (CCGS#R#)	Estudiantes Responsable (#)	Promotor (PCCG)
CGG A	AS1	AS1R1	1	P (AB)
	AS2	AS2R1	1	
	AS3	AS3R1	2	
CGG B	BS1	BS1R1	1	
		BS1R2		
	BS2	BS2R1	1	
		BS2R2		
CGG C	CS1	CS1R1	1	P (C)

De acuerdo con el cuadro 1, la codificación utilizada para los simuladores responde al club respectivo. Por ejemplo, los códigos *AS1*, *AS2* y *AS3* hacen referencia a los simulares elaborados en *CGG A*. Por su parte, la codificación asignada a los rectángulos siguió la misma estructura anterior, siendo añadido el símbolo *R#* para indicar que se está haciendo referencia al rectángulo de un simulador determinado. Por ejemplo, los códigos *BS1R1* y *BS1R2* aluden a los rectángulos que fueron construidos en el primer simulador de *CGG B*. Finalmente, los códigos atribuidos a los profesores fueron *P (AB)* y *P (C)*, para los docentes encargados de *CGG A* y *CGG B* y de *CGG C*, respectivamente.

4.2. Datos de la investigación

Los datos del estudio provienen de dos fuentes de información:

a) Las sistematizaciones elaboradas por los estudiantes para comunicar su trabajo en la ESG, las cuales eran únicas para cada simulador (véase Prieto y Gutiérrez, 2015; 2016; 2017);
b) Los archivos ggb. de los simuladores elaborados.

En cuanto a los datos de la fuente (a), se seleccionaron las seis sistematizaciones reportadas en Prieto y Gutiérrez (2016), correspondientes a los simuladores del cuadro 1. La mirada en estos documentos fue colocada en la explicación de los estudiantes del empleo de las técnicas usadas para la construcción de los rectángulos.

4.3. Análisis de los datos

El análisis de los datos se realizó en tres momentos.

En el primer momento, se extrajeron de los documentos de sistematización las tareas de construcción de los ocho rectángulos que componen el análisis. Estas tareas se listan en el cuadro 2.

Cuadro 2*. Tareas de construcción correspondientes a cada simulador.*

Simulador	Rectángulos	Tarea de construcción
AS1	AS1R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices
AS2	AS2R1	Construir un rectángulo a partir de sus cuatro vértices
AS3	AS3R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices
BS1	BS1R1	Construir un rectángulo a partir de un punto libre
	BS1R2	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior
BS2	BS2R1	Construir un rectángulo a partir de un punto libre
	BS2R2	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior
CS1	CS1R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices

En el segundo momento, articulado al momento anterior, se reconocieron los elementos considerados para la construcción de los rectángulos, a partir de la información suministrada en el enunciado de las tareas de construcción. Este reconocimiento fue llevado porque en el primer momento fueron identificados elementos comunes entre algunas tareas, lo que representó una oportunidad para organizar la información a partir de considerar tales elementos como categorías para la presentación de los resultados. Los elementos considerados para la construcción de los polígonos se muestran en el cuadro 3.

En el tercer momento, se identificaron en las sistematizaciones y en los archivos ggb. las técnicas y las diferentes acciones empleadas para la resolución de las tareas de construcción. En el siguiente apartado se presentarán y describirán los resultados de esta investigación.

Cuadro 3. *Elementos considerados para la construcción de los rectángulos*

Elementos considerados	Rectángulos	Tarea de construcción
Vértices del rectángulo	AS1R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices
	AS2R1	Construir un rectángulo a partir de sus cuatro vértices
	AS3R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices
	CS1R1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices
Punto libre	BS1R1	Construir un rectángulo a partir de un punto libre
	BS2R1	Construir un rectángulo a partir de un punto libre
Punto exterior al rectángulo	BS1R2	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior
	BS2R2	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior

Resultados

Un primer hallazgo de esta investigación fue la identificación de similitudes entre las declaraciones de cada tarea de construcción, hecho que condujo al establecimiento de tres categorías que fueron aprovechadas para la presentación de los resultados. Estas categorías, listadas a continuación, serán consideradas como clases de tareas en la construcción de los rectángulos, a partir de los elementos que fueron considerados por estudiantes y profesores para construir estos polígonos con el GeoGebra:

I. A partir de sus vértices.
II. A partir de un punto libre.
III. A partir de un punto exterior.

De las ocho tareas de construcción analizadas en este artículo, cuatro corresponden a la clase de tareas (a), dos tareas refieren a la clase (b) y las dos restantes se ajustan a la clase (c). En el cuadro 4 se organizan estas ocho tareas a partir de las clases identificadas, con su respectiva formulación y con la etiqueta correspondiente al rectángulo en cuestión.

Cuadro 4*. Clase de tareas identificadas según los elementos considerados en las construcciones*

Clases de tareas	Tarea #	Tarea de construcción	Rectángulos
Vértices del rectángulo	Tarea 1	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices	AS1R1
	Tarea 2	Construir un rectángulo a partir de sus cuatro vértices	AS2R1
	Tarea 3	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices	AS3R1
	Tarea 4	Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices	CS1R1
Punto libre	Tarea 7	Construir un rectángulo a partir de un punto libre	BS1R1
	Tarea 7	Construir un rectángulo a partir de un punto libre	BS2R1
Punto exterior	Tarea 5	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior	BS1R2
	Tarea 6	Construir un rectángulo a partir de un punto exterior	BS2R2

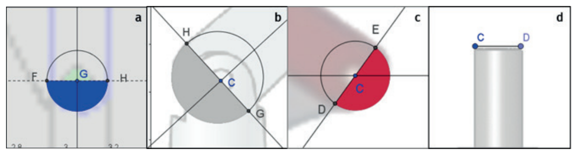
Otro hallazgo encontrado en el análisis tiene que ver con la identificación de elementos comunes en la estructura de las técnicas empleadas en la resolución de cada tarea. Al respecto, se observó que los primeros pasos de cada técnica fueron dedicados a la localización de los vértices del rectángulo, para su posterior construcción. Cabe destacar que el GeoGebra no cuenta con una herramienta de construcción de rectángulos, pero sí una denominada *Polígono*, cuyo requerimiento para construir este tipo de figuras es la indicación de sus vértices. No obstante, tal como será mostrado a continuación, el modo en que estudiantes y profesores optaron por localizar los vértices de los rectángulos al resolver cada tarea de construcción no fue necesariamente el mismo, a pesar de tratarse de un mismo saber geométrico, lo que se verá reflejado en las acciones presentes en cada paso de las técnicas empleadas.

Con este panorama, a continuación, se presentará y analizará cada técnica con sus respectivos pasos y acciones para la construcción de los rectángulos.

5.1 Construcción de rectángulos a partir de sus vértices

En las construcciones correspondiente a esta clase existían figuras geométricas previas a la construcción de los rectángulos, como puntos, rectas o circunferencias, lo cual era aprovechado por estudiantes y profesores para "economizar" construcciones en el software. En este sentido, dos puntos de esas construcciones fueron seleccionados como dos de los vértices del rectángulo (Figura 3), lo que suponía localizar solamente los otros dos vértices faltantes y después dibujar el rectángulo.

Figura 3. Condiciones previas para la construcción de los rectángulos a partir de sus vértices



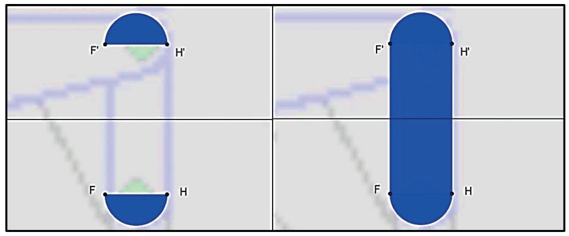
La construcción del rectángulo AS1R1 (CGG A), que daba respuesta a la Tarea 1, inició en los puntos F y H, asumidos como vértices del polígono (Figura 3a). La tarea quedó formulada de la siguiente manera: construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices. La técnica empleada para la construcción de este rectángulo constó de tres pasos (Cuadro 5): los dos primeros consistieron en la localización de los vértices faltantes del rectángulo y el último en el dibujo del rectángulo.

***Cuadro 5**. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo AS1R1*

Tarea 1. *Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices*
1. Localización del tercer vértice. – Se aplica simetría axial al vértice F con respecto a una recta paralela al segmento $\overline{FH}$. – Se obtiene el punto F', el tercer vértice del rectángulo. **2. Localización del cuarto vértice** – Se aplica simetría axial al vértice H con respecto a una recta paralela al segmento $\overline{FH}$. – Se obtiene el punto H', el cuarto vértice del rectángulo. **3. Construcción del rectángulo.** – Se construye el rectángulo de vértices $HH'F'F$.

De acuerdo con el cuadro 5, los pasos 1 y 2 de la técnica anterior revelan que la localización de los vértices restantes del rectángulo se fundamentó en la propiedad simétrica de esta figura, lo que permitió en definitiva la construcción de AS1R1 (Figura 4).

Figura 4. Construcción del rectángulo AS1R1, Tarea 1



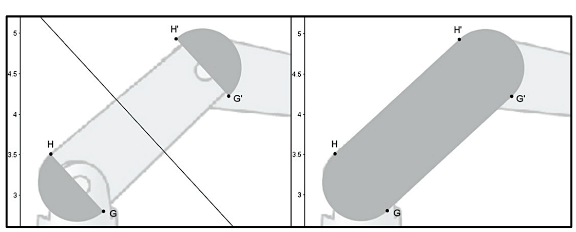
La construcción del rectángulo AS2R1 (CGG A), relativa a la Tarea 2, presentó las mismas condiciones que la construcción anterior, con la salvedad de que, en este caso, los puntos en los que se inició la construcción fueron H y G (Figura 3b), lo que llevó a que la tarea de construcción quedara estructurada de la siguiente forma: construir un rectángulo a partir de sus cuatro vértices. Aunque en la tarea se indica que el rectángulo sería construido a partir de todos sus vértices, los pasos 1 y 2 de la técnica revelan que solo se determinaron dos vértices, del mismo modo que el caso anterior (Cuadro 6).

***Cuadro 6**. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo AS2R1*

Tarea 2. *Construir un rectángulo a partir de sus cuatro vértices*
1. Localización del tercer vértice. – Se aplica simetría axial al vértice G con respecto a una recta paralela al segmento $\overline{GH}$. – Se obtiene el punto G', el tercer vértice del rectángulo. **2. Localización del cuarto vértice** – Se aplica simetría axial al vértice H con respecto a una recta paralela al segmento $\overline{GH}$. – Se obtiene el punto H', el cuarto vértice del rectángulo. **3. Construcción del rectángulo.** – Se construye el rectángulo de vértices $GHH'G'$.

En las acciones de los dos primeros pasos de esta técnica se muestra que esta construcción se apoyó en la misma propiedad de simetría del rectángulo (Figura 5), al igual que en el caso anterior.

Figura 5. Construcción del rectángulo AS2R1, Tarea 2



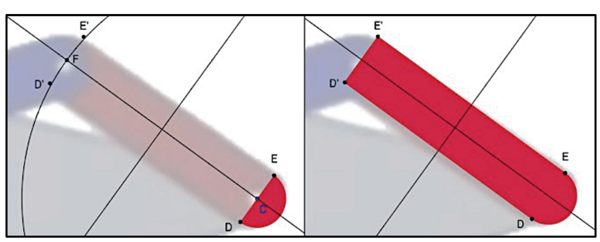
En la construcción del rectángulo AS3R1 (CGG A), de la Tarea 3, los dos puntos que se consideraron como vértices del polígono para iniciar la construcción fueron D y E (Figura 3c). Con ello, la tarea de construcción quedó formulada de la siguiente forma: construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices. Como en los casos anteriores, los pasos 1 y 2 de la técnica muestran que la localización de los dos vértices faltantes también se apoyó en la simetría del rectángulo. No obstante, el paso 1 de la técnica considera la construcción del eje de simetría del rectángulo que ayudaría a determinar el tercer vértice (Cuadro 7), cuestión que no ocurrió en los casos anteriores. La figura 6 ilustra la construcción del rectángulo AS3R1 según la técnica informada en el cuadro 7.

Cuadro 7*. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo AS3R1*

Tarea 3. *Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices*
1. Localización del tercer vértice. – Se traza una recta perpendicular al segmento $\overline{DE}$ que pasa por el punto C. – Se construye una circunferencia con centro en C que corta a la recta anterior. – Se determina el punto de intersección entre ambas curvas, llamado F. – Se traza la mediatriz entre C y F. – Se aplica simetría axial al vértice E con respecto a la mediatriz entre C y F. – Se obtiene el punto E’, el tercer vértice del rectángulo.
2. Localización del cuarto vértice – Se aplica simetría axial a los vértices D con respecto a la mediatriz entre C y F. – Se obtiene el punto D’, el cuarto vértice del rectángulo.
3. Construcción del rectángulo. – Se construye el rectángulo de vértices $DD'E'E$.

En la figura 6 se puede ver la imagen alusiva a la construcción de rectángulo según la *técnica* presentada en el cuadro 7.

Figura 6. Construcción del rectángulo AS3R1, Tarea 3



La construcción del rectángulo CS1R1 (CGG C) dio respuesta a la Tarea 4, la cual fue declarada de la siguiente manera: construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices, siendo esos vértices los puntos C y D (Figura 3d).

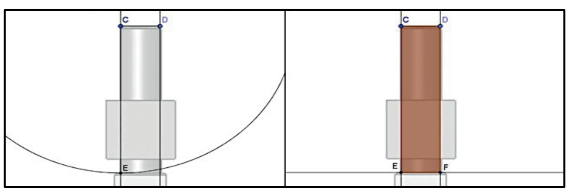
Al igual que en los casos anteriores, los pasos 1 y 2 de la técnica aplicada en esta tarea se destinaron a la localización de los vértices faltantes y al dibujo del rectángulo (Cuadro 8).

***Cuadro 8**. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo CS1R1*

Tarea 4. *Construir un rectángulo a partir de dos de sus vértices*
1. Localización del tercer vértice. – Se traza una recta paralela al $eje\ y$ que pasa por C, llamada d. – Se construye una circunferencia con centro en C y radio $\frac{80}{20} \cdot b$ $(b = CD)$. – Se determina el punto de corte entre la recta d y la circunferencia f, llamado E, el tercer vértice.
2. Localización del cuarto vértice. – Se traza una recta paralela al $eje\ y$ que pasa por D. – Se traza una recta paralela al $eje\ x$ que pasa por E. – Se determina el punto de intersección entre las rectas g y h, llamado F, el cuarto vértice.
3. Construcción del rectángulo. – Se construye el rectángulo de vértices $CDEF$.

Sin embargo, en las acciones seguidas en cada paso se ponen de manifiesto las relaciones de paralelismo entre cada par de lados opuestos de un rectángulo, lo que coadyuvó a la determinación de los vértices y, posteriormente, a la construcción del polígono (Figura 7).

Figura 7. Construcción del rectángulo CS1R1, Tarea 4



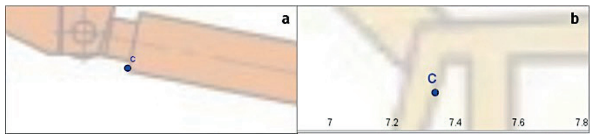
Como lo muestran los datos presentados, los cuatro casos descritos revelan la influencia que el artefacto tuvo sobre estudiantes y profesores al condicionarles en la localización de los vértices faltantes para la construcción de los rectángulos. No obstante, las tareas 1, 2 y 3 fueron las que mayor similitud presentaron en sus técnicas, donde la simetría del rectángulo fue clave para la determinación de los vértices. Esta similitud puede justificarse en tanto que los sujetos que participan en la actividad también influencian en la materialización del saber, es decir, en el conocimiento que es producido a través de ella (Radford, 2013), ya que los tres casos referidos a las tareas mencionadas pertenecen al CGG A.

Aunque cada estudiante era responsable de su respectivo simulador, ellos recibían ideas de sus colegas del mismo CCG sobre cómo proceder en la construcción de la figura, lo que también pudo haber influenciado. Sin embargo, las acciones seguidas en cada paso de las técnicas de construcción tienen sus particularidades. En efecto, con respecto a la Tarea 4, resuelta en CGG C, donde los participantes eran diferentes de CGG A, se puede observar que el conocimiento producido en la técnica es diferente al de los tres primeros casos, a pesar de tratarse de la construcción de la misma figura geométrica y con el mismo artefacto.

5.2. Construcción del rectángulo a partir de un punto libre

Por lo general, la construcción de una determinada figura geométrica en una nueva hoja de trabajo del GeoGebra suele comenzarse a partir de un punto libre, en vista de que no se cuenta con ningún otro objeto que pueda servir de apoyo para iniciar la construcción. En este sentido, las dos técnicas que serán presentadas a continuación constituyen la primera construcción realizada para la elaboración del simulador correspondiente. No obstante, los puntos libres utilizados fueron localizados en lugares específicos, en función de las imágenes que estudiantes y profesores insertaban en la vista gráfica del software para utilizarlas como marco de referencia en la elaboración de sus simuladores (Figura 8).

Figura 8. Ubicación de un punto libre para iniciar una construcción.



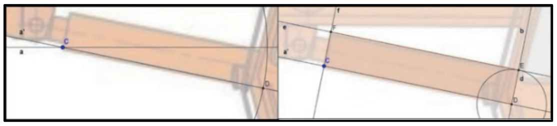
De acuerdo con lo comentado anteriormente, la construcción del rectángulo BS1R1 (CGG B), relativa a la Tarea 5, constituyó la primera construcción del simulador BS1. De este modo, la tarea de construcción de este rectángulo quedó estructurada como sigue: construir un rectángulo a partir de un punto libre, llamado C (Figura 8a). La técnica empleada para la construcción de este rectángulo se compuso por cinco pasos, en los que cuatro de ellos estuvieron enfocados en la localización de los vértices y el dibujo del polígono.

***Cuadro 9**. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo BS1R1*

Tarea 5. *Construir un rectángulo a partir de un punto libre*
1. Localización del primer vértice. – Se ubica el punto C, el primer vértice. **2. Localización del segundo vértice.** – Se traza una recta paralela al $eje\ x$, llamada a, que pasara por C. – Se rota a la recta a con respecto a C unos $168{,}5°$ y se obtiene la recta a'. – Se construye una circunferencia de radio $Rd = 1{,}65$, llamada c, con centro en C. – Se determina el punto de intersección entre la recta a’ y la circunferencia c, llamado D, el segundo vértice. **3. Localización del tercer vértice.** – Se traza una recta, llamada b, perpendicular a la recta a' que pasara por D. – Se construye una circunferencia con centro en D y radio $\frac{Rd}{5{,}5}$. – Se determina el punto de intersección entre la recta a y la curva anterior, llamado E, que es el tercer vértice. **4. Localización del cuarto vértice.** – Se traza una recta por el punto E perpendicular a la recta b. – Se traza una recta perpendicular a la recta a' que pasa por C. – Se determina el punto de intersección entre ambas rectas, llamado F, el cuarto vértice. **5. Construcción del rectángulo.** – Se construye el rectángulo con vértices $CDEF$.

En el paso 2 de esta técnica se registra cómo fue localizado el segundo vértice, mientras que en los pasos 3 y 4 se evidencia que las nociones de perpendicularidad entre cada par de lados consecutivos del rectángulo fue lo que orientó las acciones para la determinación de los otros dos vértices del rectángulo (Figura 9).

Figura 9. Construcción del rectángulo BS1R1, Tarea 5



La construcción del rectángulo BS2R1, realizada para dar respuesta a la Tarea 6, representó la construcción de la primera figura geométrica en el simulador. Al igual que en el caso anterior, la tarea de construcción fue formulada en los siguientes términos: construir un rectángulo a partir de un punto libre, siendo C el punto libre (Figura 8b). En la técnica de la construcción de este rectángulo fueron identificados cuatro pasos para la resolución de la tarea, donde los pasos 1, 2 y 3 se dedicaron a la localización de los vértices y al dibujo del polígono (Cuadro 10).

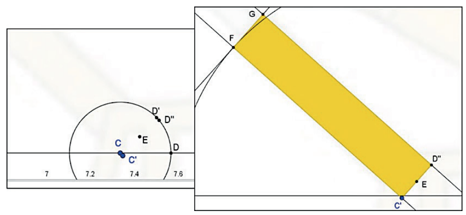
Cuadro 10. *Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo BS2R1*

Tarea 6. *Construir un rectángulo a partir de un punto libre*

1. **Localización de primer y segundo vértice.**
   - Se traza una recta paralela al $eje\ x$ que pasara por C.
   - Se construye una circunferencia con centro en C y radio $pm = 0{,}23$.
   - Se determina el punto de corte entre la circunferencia c y la recta, llamado D.
   - Se rota el punto D con respecto a C unos $40°$, obteniéndose el punto D'.
   - Se determinó el punto medio entre C y D', llamado E.
   - Se rotó el punto C y D' con respecto a E unos $8.23°$, obteniéndose los puntos C' y D'', dos vértices del rectángulo.
2. **Localización del tercer vértice.**
   - Se traza el segmento $\overline{C'D''}$.
   - Se traza una recta perpendicular al segmento anterior que pase por C'.
   - Se construye una circunferencia con centro en C' y radio $5{,}1 \cdot pm$.
   - Se determina el punto de intersección entre la recta y la curva anterior, llamado F, el tercer vértice.
3. **Localización del cuarto vértice.**
   - Se traza una recta paralela al segmento $\overline{C'D''}$que pasa por F.
   - Se traza una recta perpendicular al segmento $\overline{C'D''}$ que pasa por F.
   - Se determina el punto de corte entre ambas rectas, llamado G, el cuarto vértice.
4. **Construcción del rectángulo.**
   - Se construye el rectángulo de vértices $C'D''GF$.

En la técnica de esta construcción, el paso 1 presenta las acciones seguidas para la determinación de dos vértices del rectángulo, mientras que las acciones de los pasos 2 y 3 se dedicaron a ubicar el tercer y cuarto vértice del rectángulo. En las acciones de estos dos últimos pasos, además de mostrarse el uso de las relaciones de perpendicularidad entre cada par de lados consecutivos, también se usó la relación de paralelismo entre cada par de lados opuestos. Finalmente, en el paso 4 se concreta la construcción del rectángulo (Figura 10).

Figura 10. Construcción del rectángulo BS2R1, Tarea 6



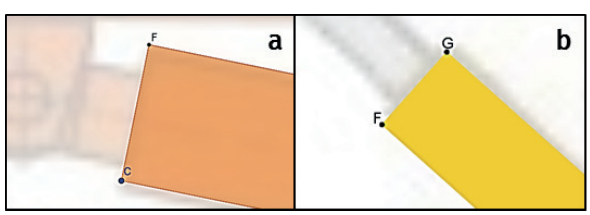
Como es posible observar en los dos casos presentados, además de la influencia del artefacto que condicionó la localización de los vértices de cada rectángulo, los conocimientos reflejados en las acciones de las dos técnicas presentan algunos aspectos similares, ya que en ambos casos las ideas de perpendicularidad entre cada par de lados consecutivos de un rectángulo guiaron los procesos de construcción. Este asunto puede justificarse en la razón de que los actores sociales también influencian en el conocimiento obtenido (Radford, 2013).

Se destaca también que los rectángulos BS1R1 y BS2R1 de ambas tareas se construyeron en el mismo CGG (CGG B). Como fue mencionado anteriormente, cada estudiante es responsable de su propio simulador, pero también es un sujeto abierto a la consideración de las ideas de sus pares en el club, lo que también pudo haber influenciado en la labor que ellos desplegaron. No obstante, en cada caso, las acciones de cada técnica reflejan sus particularidades y su propio conocimiento, a pesar de haber sido construcciones realizadas en un mismo contexto.

5.3. Construcción de rectángulos a partir de un punto exterior

Con respecto a esta clase de tareas, se resalta que los puntos considerados para iniciar las construcciones no representaban algún vértice del rectángulo (Figura 11), a pesar de que en el simulador ya se contaban con construcciones previas, como se vio en las construcciones referentes a las tareas de la primera clase.

Figura 11. Condiciones previas para la construcción de los rectángulos a partir de un punto exterior

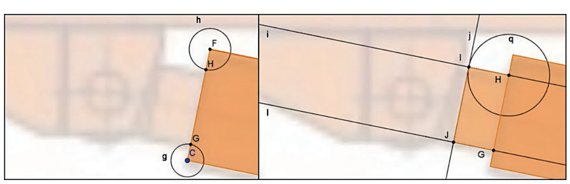


La construcción del rectángulo BS1R2 (CGG B) fue llevada a cabo para resolver la Tarea 7, formulada de la siguiente forma: construir un rectángulo a partir de un punto exterior, siendo C dicho punto (Figura 11a). La técnica empleada constó de cinco pasos, cuatro de ellos para la determinación de los vértices del rectángulo y el último para dibujar la figura. En los pasos 2, 3 y 4 se evidencia la relación de perpendicularidad entre cada par de lados consecutivos y la de paralelismo entre un par de lados opuestos del rectángulo para localizar los vértices del rectángulo (Cuadro 11). La figura 12 se ilustran las acciones de esta técnica.

Cuadro 11*. Pasos y acciones seguidas en la técnica para la construcción del rectángulo BS1R2*

Tarea 7. *Construir un rectángulo a partir de un punto exterior*
1. Localización del primer vértice. – Se construye una circunferencia con centro en C y radio $\frac{Rd}{38}$ ($Rd = 1{,}65$), que corta segmento $\overline{CF}$. – Se determina el punto de intersección entre la circunferencia y el segmento $\overline{CF}$, llamado G, el primer vértice. **2. Localización del segundo vértice.** – Se construye una circunferencia con centro en F y radio $\frac{Rd}{30}$, que corta al segmento $\overline{CF}$. – Se determina el punto de corte entre la circunferencia y el segmento $\overline{CF}$, llamado H, el segundo vértice. **3. Localización del tercer vértice.** – Se traza una recta perpendicular al segmento $\overline{CF}$, llamada i, que pasa por H. – Se construye una circunferencia con centro en H y radio $Rd = 1{,}65$ que cortara a la recta i. – Se determina el punto de corte entre la recta y la circunferencia con centro en H, llamado I, el tercer vértice. **4. Localización del cuarto vértice** – Se traza una recta perpendicular a la recta i que pasa por I. – Se traza una recta paralela a la recta i al pasar por G. – Se determina el punto de corte entre las rectas anteriores, llamado J, el cuarto vértice. **5. Construcción del rectángulo.** – Se construye el rectángulo de vértices $GHIJ$.

Figura 12. Construcción del rectángulo BS1R2, Tarea 7



Finalmente, la construcción del rectángulo BS2R2 (CGG B), relativo a la Tarea 8, inició con el punto F que representa el punto exterior indicado en la tarea: construir un rectángulo a partir de un punto exterior (Figura 11b). El número de pasos empleados en la técnica fue igual al número de pasos utilizados en el caso anterior.

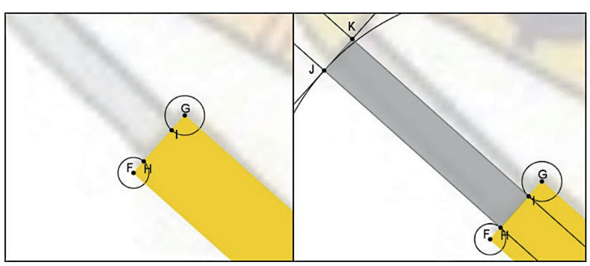
Asimismo, las relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre los lados del rectángulo para la localización de los vértices de la figura fueron evidenciadas, pero las acciones seguidas en cada paso fueron diferentes, tal como se puede apreciar en el cuadro 12.

Cuadro 12. Pasos y acciones seguidas en la *técnica* para la construcción del rectángulo BS2R2

Tarea 8. *Construir un rectángulo a partir de un punto exterior*
1. Localización del primer vértice. – Se construye una circunferencia con centro en F y radio $\frac{pm}{5}$ $(pm = 0{,}23)$, que corta segmento $\overline{FG}$. – Se determina el punto de intersección entre la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$, llamado H, el primer vértice. **2. Localización del segundo vértice.** – Se construye una circunferencia con centro en G y radio $\frac{pm}{3{,}9}$, que corta al segmento $\overline{FG}$. – Se determina el punto de corte entre la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$, llamado I, el segundo vértice. **3. Localización del tercer vértice.** – Se traza una recta paralela al segmento $\overline{FG}$ que pasa por H. – Se construye una circunferencia con centro en H y radio $rd = 0{,}7$ que corta a la recta anterior. – Se determina el punto de corte entre la recta y la circunferencia con centro en H, llamado J, el tercer vértice. **4. Localización del cuarto vértice** – Se traza una recta paralela al segmento $\overline{FG}$que pasa por J. – Se traza una recta perpendicular a $\overline{FG}$ que pasa por J. – Se determina el punto de corte entre las rectas anteriores, llamado K, el cuarto vértice. **5. Construcción del rectángulo.** – Se construye el rectángulo de vértices $HIJK$.

En la figura 13 se ilustra lo presentado en el cuadro 12.

Figura 13. Construcción del rectángulo BS2R2, Tarea 8



En la resolución de ambas tareas, la atención fue colocada en la localización de los vértices del rectángulo que se iba a construir, aspecto condicionado directamente por el software GeoGebra. Además, en las dos técnicas se reconoce el uso de las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de los rectángulos como fundamento para la determinación de cada uno de los vértices. Estas similitudes pueden justificarse en el hecho de que ambos casos pertenecen al mismo CGG (CGG B) y, tal como fue comentado en la clase de tareas (a), los participantes de los clubes tenían por cultura de trabajo el intercambio de ideas en el momento de elaborar sus simuladores, aspecto que caracteriza el despliegue de una labor conjunta genuina. Aun así, se puede notar que las acciones de ambas técnicas presentan sus propias particularidades.

En el próximo apartado se presentarán las conclusiones de este trabajo.

Conclusiones

Con base en los conceptos de saber, labor conjunta y conocimiento de la TO, en este artículo fueron presentadas y analizadas diferentes técnicas empleadas por un grupo de estudiantes y profesores para la construcción de rectángulos con el software GeoGebra, en el contexto de las actividades de ESG que se realizaban en el seno del PCG. De acuerdo con lo descrito en el apartado anterior, el análisis realizado condujo a la obtención de algunas conclusiones referidas a los participantes de los CGGs y al artefacto utilizado en las diferentes actividades de construcción.

En cuanto a los participantes, se observó que las técnicas empleadas en un mismo CGG tenían elementos similares. Por ejemplo, en CGG A, la propiedad simétrica de los rectángulos fue lo que orientó las acciones en las técnicas de construcción de las tareas 1, 2 y 3. Otro ejemplo es el referido a CGG B, donde se presentaron dos clases de tareas: dos técnicas para las construcciones a partir de un punto libre y dos para aquellas que partían de un punto exterior. En esos cuatro casos se evidenció el uso de las relaciones de perpendicularidad y paralelismos propias de un rectángulo para construir esta figura. Vale destacar que, en todos los casos presentados, las propiedades y características que se conocen del rectángulo fueron las que guiaron la construcción de la figura en el software GeoGebra.

Teniendo en cuenta los preceptos de la TO, las similitudes entre las técnicas presentadas se justifican debido a que los sujetos que participan en una determinada labor conjunta pueden influenciar en sus resultados. En los casos presentados, el saber movilizado estaba referido al rectángulo como objeto geométrico, y en la actividad de construir este polígono, los participantes de cada CGG se involucran en las construcciones, lo que genera que los conocimientos producidos presenten características particulares. En este sentido, se puede concluir que es posible que un grupo de estudiantes dedicados a la construcción de determinada figura geométrica con un mismo artefacto movilicen ideas similares en su actividad de construcción.

En lo que respecta al artefacto utilizado, se tiene que el GeoGebra influenció notadamente la estructura de cada técnica, ya que todas las construcciones estuvieron orientadas por la determinación de los vértices de los rectángulos, aspecto exigido por la herramienta Polígono del software. Además, la determinación de los vértices estuvo en función de las propiedades y características de los rectángulos, lo que garantizó que las construcciones realizadas produjeran una “construcción geométrica” en lugar de un mero “dibujo” (Borba et al., 2018). Este segundo aspecto tiene relación directa con lo planteado por Radford (2006) al sostener que el artefacto se trata de una herramienta que es parte constitutiva e intrínseca del pensamiento humano, y no una simple ayuda.

En esta línea de ideas, se considera importante destacar que los conocimientos producidos en la actividad dependieron también de los elementos con los que se contaba para realizar la construcción. En la primera clase de tareas, el conocimiento dependió de dos puntos que fueron considerados como vértices del rectángulo, mientras que en la última clase se utilizaron puntos exteriores a los rectángulos. Esta cuestión, además de ayudar a la organización de la información para su presentación y análisis, puede dar indicios de la comprensión de los diferentes conocimientos que se pueden identificar al momento de construir una determinada figura geométrica con el software GeoGebra. Por ejemplo, en esta investigación se evidenció cómo un rectángulo fue construido de diferentes modos, lo que mismo pudiera suceder con otras tareas matemáticas que se planteen y que sus resultados sean diferentes.

Finalmente, se considera que lo reportado en este artículo puede motivar el análisis de otras experiencias educativas similares, sobre todo si se tratan de actividades no convencionales que hacen vida en el seno de instituciones escolares, como es el caso de las actividades de ESG realizadas en Venezuela. Particularmente, las investigaciones realizadas en los últimos años sobre el desarrollo de las actividades de ESG se han mostrado relevantes para comprender el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de educación básica que participan de forma libre y voluntaria en espacios como los CGGs. Lo anterior cobra más importancia aún si se toma en cuenta que el PCG fue un proyecto que se creó como un proyecto de servicio comunitario, impulsado desde la Asociación Aprender en Red, en respuesta a la necesidad de sus miembros de contribuir con la responsabilidad social que todo profesor de matemáticas debe asumir desde su trabajo profesional.

◆ Agradecimientos

Al Profe. M.Sc. Rafael Enrique Gutiérrez Araujo por la revisión crítica y por las ideas enriquecedoras para el fortalecimiento del carácter científico de este artículo.

Referencias

Bermúdez, J. y Sulbarán, J. (2016). Representación del movimiento circular de la manivela del mecanismo de Klann por medio del GeoGebra. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 308-313). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Bicudo, M. A. V. (2005). Pesquisa qualitativa: significados e a razão que a sustenta. *Revista pesquisa qualitativa*, *1*(1), 7-26. Recuperado de: https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/7

Bicudo, M. A. V. (2012). A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *5*(2), 15-26. doi: 10.3895/S1982-873X2012000200002

Borba, M. C., Silva, R. S. y Gadanidis, G. (2018). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento* (2.a ed). Belo Horizonte: Autêntica Editora. (Original publicado en el 2014).

Castillo, L. A., Gutiérrez, R. E. y Sánchez S., I. C. (2020). O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *9*(3), 106-199. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i3p106-119

Chirinos, M. (2016). Simulación de un mecanismo leva-seguidor con el GeoGebra. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), Memorias *del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 275-283). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Díaz-Urdaneta, S. y Pereira, L. R. N. (2020). Reorganización del conocimiento matemático en la Elaboración de Simuladores con GeoGebra: análisis de una actividad que envuelve la noción de cuadrado. *Revista Paradigma*, *41*(Extra 2), 383-403. doi: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p383-403.id916

Díaz-Urdaneta, S. y Prieto G., J. L. (2016). Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. En Y. Serres, A. Martínez, M. Inojosa y N. Gómez (Eds.), *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 445-453). Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT.

Estrada, Y. (2016). Representando el cilindro hidráulico de una grúa autopropulsada con GeoGebra. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 105-113). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Gutiérrez, R. E., Prieto G., J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, *29*(2), 37-68. doi: 10.24844/EM2902.02

Peley, S. (2016). La rotación en la simulación de un brazo robótico con el GeoGebra. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 249-257). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto G., J. L., Castillo, L. A. y Márquez, M. (2020). Formas de colaboración humana entre profesores y alumnos durante la elaboración de simuladores con GeoGebra. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 199-224. doi: 10.1590/1980-4415v34n66a10

Prieto G., J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto G., J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto G., J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2017). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(n. especial), 103-129. Recuperado de: http://relime.org/index.php/repositorio/volumen-9/numero-especial-9-4/0904p/270-pdf-elementos-de-una-teoria-cultural-de-la-objetivacion/file.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44. doi: 10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2014, octubre 18). *La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural: La teoría de la objetivación* [Video file]. Recuperado de http://www.luisradford.ca/pub/video_gemad_Oct18_2014.html

Radford, L. (2017a). A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. En V. D. Moretti y W. L. Cedro (Eds.), *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural* (pp. 229-261). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Radford, L. (2017b). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 97-114). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80. doi: 10.30827/pna.v12i2.6965

Radford, L. (2019). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En S. Takeco-Gobara y L. Radford (Eds.), *Teoria da objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). São Paulo: Livraria da Física.

Radford, L. (2021). *Teoria da objetivação: uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática* (B. Morey y S. T. Gobara, trads.). São Paulo: Livraria da Física.

Rondón, E. (2016). La rotación en la representación de un cilindro hidráulico en el GeoGebra. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 258-266). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Rubio, L., Prieto G., J. L. y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation*, *2*, 90-111. Recuperado de: https://upo.es/revistas/index.php/IJERI/article/view/1586

Sánchez-Noroño, I. V. y Prieto G., J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *96*, 79-101. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12707/

Sánchez-Noroño, I. V., Prieto G., J. L., Gutiérrez, R. E. y Díaz-Urdaneta, S. (2020). Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra. Educação Matemática, *32*(1), 99-131. doi: 10.24844/EM3201.05

Sánchez-Noroño, I. V., Sánchez S., I. C., Gutiérrez, R. E., Díaz-Urdaneta, S., Prieto G., J. L. y Castillo, L. A. (2020). Proyecto Club GeoGebra: una respuesta a la necesidad de constitución como actores de la educación matemática. *Pesquisas e Práticas Educativas*, *1*, 1-23. doi: 10.47321/PePE.2675-5149.2020.1.e202019

Sánchez S., I. C. y Prieto G., J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA*, *14*(1), 55-83. doi: 10.30827/pna.v14i1.8657

Villalobos, E. (2016). La geometría en los balancines del mecanismo de Klann. En J. L. Prieto G. y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 99-104). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red

DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS USANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS: LAS RECTAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

DIFFICULTIES IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS BY USING TECHNOLOGICAL RESOURCES: NOTABLE STRAIGHT LINES OF TRIANGLES

DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS: AS MARCÁVEIS LINHAS DE TRIÂNGULOS

Horacio Sostenes

Escuela Secundaria Técnica No.182 “Patria”, Toluca, México

Email: hssg_33@hotmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5797-8497

Resumen

El propósito de este artículo es mostrar y analizar las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al resolver las situaciones presentadas en la secuencia didáctica, diseñada desde la Teoría de Situaciones Didácticas para el estudio de las rectas notables del triángulo, usando como medio al software GeoGebra. El marco teórico para el estudio de las actividades se apoya en los planteamientos de situaciones didácticas a través de la resolución de problemas, en un ambiente controlado usando recursos tecnológicos. Los resultados evidencían que las principales dificultades de implementación son la selección de las herramientas útiles (entre ellas la herramienta *bisectríz y perpendicular*) y con ello los elementos necesarios para realizar los trazos, también se tienen dificultades en la comprensión de la definición y características de los objetos geométricos involucrados.

Palabras clave: resolución de problemas, geometría dinámica, rectas notables, dificultades de implementación

Abstract

This paper aims to show and analyze the main difficulties students face when solving the situations presented in the teaching sequence, designed from the Theory of didactic situations for the study of triangle notable straight lines by using GeoGebra software. The theoretical framework to study the activities is based on the ways the didactic situations are set out through problem solving, in a controlled setting by using technological resources. The outcomes demonstrate that the main implementation difficulties are given by the selection of useful tools (being bisector and perpendicular tools among them) and so, the necessary elements to make the lines. There are also difficulties in understanding the definitions and characteristics of the involved geometric objects.

Keywords: problem solving, dynamic geometry, notable straight lines, implementation difficulties.

Resumo

O objetivo deste artigo é mostrar e analisar as principais dificuldades que os estudantes enfrentam ao resolver as situações apresentadas na sequência didática, projetada a partir da Teoria das Situações Didáticas para o estudo das retas notáveis do triângulo, utilizando como meio o software GeoGebra. O marco teórico para o estudo das atividades apoia-se nas propostas de situações didáticas através da resolução de problemas, em um ambiente controlado usando recursos tecnológicos. Os resultados evidenciam que as principais dificuldades de implementação são a seleção das ferramentas úteis (entre elas a ferramenta bissectriz e perpendicular) e com isso os elementos necessários para a realização dos traçados, também há dificuldades em entender a definição e as características dos objetos geométricos envolvidos.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Geometria dinâmica, Retas notáveis, Dificuldades de implementação

Introducción

La introducción de la Matemática al aula requiere de transformaciones importantes para hacerla accesible y dotarla de didáctica (Chevallard, 1997), a fin de que los estudiantes puedan comprenderla de mejor manera y el saber matemático pueda ser visto desde el contexto que rodea a los estudiantes. Para la educación básica, secundaria, la resolución de problemas es una de las principales actividades para la enseñanza de las Matemáticas (Santos-Trigo, 2014) que incluso es el enfoque pedagógico que se presenta en el Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica 2011 (SEP, 2011) en México, vigente al momento de realizar esta investigación.

Uno de los objetivos de la Educación Matemática es comprender y analizar cómo aprenden y desarrollan conocimiento en esta disciplina los estudiantes cuando resuelven problemas (Santos-Trigo et al., 2016). Hablar de resolver un problema no implica pensar únicamente en la respuesta final o la solución, sino en un conjunto de procesos que llevan a construirla, ya sea utilizando herramientas de la mente o en conjunto con instrumentos tecnológicos que sirven de soporte para hacer más accesible su análisis y lograr resolverlo.

La resolución de problemas geométricos que implican el uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos y cuadriláteros se ubica como un tema de primer grado de educación básica, secundaria en México, el cual se visualiza como un contenido con complejidad para los estudiantes (Sánchez et al., 2016). Y ya que el uso de la tecnología concretado en el desarrollo de Habilidades digitales es un estándar curricular que debe lograrse al culminar la educación básica mexicana, puede utilizarse para potenciar el aprendizaje de temas complejos. Ya que la mayoría de investigaciones geométricas en un escenario tecnológico o dinámico (Carreira et al., 2016; Reyes, 2016; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2014) se enfocan en resaltar los beneficios de la incorporación tecnológica se vuelve interesante estudiar las dificultades y errores presentadas durante la resolución de situaciones problema.

Por lo anterior, el objetivo de la investigación es analizar principalmente los errores y dificultades durante la implementación de una secuencia didáctica (diseñada desde la Teoría de situaciones didácticas) enfocada en la resolución de problemas geométricos sobre las rectas notables utilizando como recurso el software GeoGebra, trabajada con estudiantes de primer grado de educación secundaria, quienes tienen por primera vez la interacción con el software. Para realizar el análisis se retoma la metodología con corte cualitativo donde se prioriza el análisis de los errores y dificultades presentes durante el desarrollo de la secuencia didáctica a través de sus dos fases implementadas con estudiantes de secundaria en México.

Las rectas notables en los libros de texto de educación básica

Considerando que, para la educación básica, los Libros de Texto Gratuito (LTG) “son un recurso de alto impacto en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se consideran incluso como los materiales curriculares con mayor incidencia cuantitativa y cualitativa en el aprendizaje de los estudiantes dentro y fuera del aula” (Reyes y Rodríguez, 2014, p. 543). En México, los libros de texto de primaria se vuelven entonces el principal referente sobre el antecedente en el estudio de las rectas notables.

Partamos entonces por conceptualizar a las rectas notables de los triángulos a partir de lo que los libros de texto contienen. Las rectas notables de todo triángulo son cuatro:

La mediatriz es entendida como “El conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento. La perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. El eje de simetría del segmento” (SEP, 2006, p. 152).

La bisectriz de un ángulo es “La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y determina dos ángulos iguales. El eje de simetría del ángulo. El conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo” (SEP, 2006, p. 156).

La altura en Arteaga y Sánchez (2013) es presentada como “La altura de un triángulo es la perpendicular desde un vértice al lado opuesto” (p. 52), mientras que “La mediana de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, es la recta que une dicho vértice con el punto medio del lado opuesto” (p. 53).

La revisión que Reyes y Rodríguez (2014) realizan en los LTG de primaria, muestra que de las cuatro rectas notables, el estudio de la altura es el único que se aborda en este nivel, sin embargo se presenta en mayor medida en triángulos, y los problemas que se abordan se enfocan en determinar el área de figuras geométricas, retomando a la noción de altura solamente como una medida. No se visualiza el estudio de las propiedades de la altura, tampoco construcciones que partan del trazo de ésta.

En secundaria, el estudio de las rectas notables que se visualiza a través de los diferentes libros de texto analizados por Reyes y Rodríguez (2014), da cuenta que no en todos los libros se incluye el estudio de los diferentes tipos de triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos. Además, en su estudio se analiza que el trazo de las rectas notables en triángulos dibujados con un lado paralelo al borde inferior de la hoja del libro; obstaculiza y limita, entre otras cosas, el razonamiento geométrico cuando se presentan los triángulos en una posición distinta. Por otro lado, la mayoría de las actividades que se presentan en los libros enfatizan el trazo de estas rectas más que su análisis y uso en la resolución de situaciones problema.

Considerando las problemáticas arriba comentadas, y a partir de los resultados de pruebas estandarizadas, entre ellas Planea 2015 (INEE, s.f.) y Excale 2012 (Sánchez et al., 2016), se visualiza que la resolución de problemas que implican el uso de las rectas notables de triángulos es un tema de dificultad, ya que los estudiantes de secundaria logran un 27% de aciertos en lo relacionado a este contenido. Por consecuente el análisis de las estrategias de solución ante problemas geométricos sobre las rectas notables cobra sentido y relevancia.

Desde el posicionamiento que considera que el uso coordinado de las tecnologías digitales puede ser un factor fundamental para alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza matemática por abrir nuevas formas de identificar, formular, representar, explorar, y resolver problemas (Santos-Trigo, y Reyes-Martínez, 2014), se retoma el uso de recursos tecnológicos como medio en el que se desarrolla el contexto de esta investigación sobre la resolución de problemas.

Marco teórico

Desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) consideramos que el conocimiento matemático emerge de la solución de problemas matemáticos, así:

> *“Cualquier problema establecido en un aula es explícita o implícitamente parte de una situación, y la situación es considerada la unidad mínima de análisis para comprender lo que podría estar o realmente está en juego desde el punto de vista cognitivo en el proceso de resolución” (Artigue y Houdement, 2007, p.366).*

Para este estudio se pretende que los estudiantes evoquen los saberes previos, “El docente plantea un problema que el alumno debe resolver: si el alumno responde, demuestra que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que requiere una información, una enseñanza.” (Brousseau, 2007, p.30). Los problemas se vuelven situaciones que retan al intelecto de los estudiantes, quienes tienen que manifestar sus saberes tanto del tema.

En la TSD, el conocimiento matemático se atribuye a diferentes funciones a las que se adjuntan cuatro categorías de situaciones: situaciones de acción, de comunicación, de validación y de institucionalización. Las situaciones de acción que son aquellas que ponen al estudiante en contacto con un problema, donde la solución representa el saber que se pretende que adquieran, pero deja librado a las posibilidades cognitivas de los alumnos la resolución. Las situaciones de comunicación presentan acciones de compartir lo que los estudiantes hicieron para resolver la situación planteada.

Debido a que la noción de problema varia en relación al autor que se consulte, para esta investigación llamaremos problema o "problemas de contexto real simulado" o situaciones problema, a las situaciones matemáticas que presentan un reto intelectual para los estudiantes, quienes no cuentan con un esquema inmediato de solución, por lo que no son situaciones de repetición o mecanización. Son planteamientos que presentan una situación problema basadas en un escenario retomado de la realidad, ajustados para propiciar el uso de conocimientos matemáticos específicos.

3.1 Resolución de problemas con tecnología

La incorporación de tecnología al aula ha propiciado que la manera en que se aprende y en la que se enseña cambie, debido principalmente a que al tener mayor cantidad de recursos y abrir el acceso a mayores fuentes de información, las estrategias de enseñanza se diversifican, posibilitando al estudiante participar de su aprendizaje en un escenario de descubrimiento, manipulación y reflexión. Los beneficios de incorporación de recursos tecnológicos en el aprendizaje de la matemática son diversos, sin embargo, su uso también genera retos y dificultades en su incorporación.

Entre los beneficios que se vislumbran cuando se tiene acceso y se logra un uso eficiente de los recursos tecnológicos para el aprendizaje de la matemática está que los alumnos pueden extender las representaciones y estrategias que aparecen en acercamientos basados en un ambiente de trabajo con lápiz y papel, pero además generar con ello, nuevas formas de razonamiento para desarrollar conocimiento matemático. Como vemos en Reyes (2016):

> *Las posibilidades que ofrecen estas tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas van desde brindar acceso a una biblioteca de videos con explicaciones sobre conceptos matemáticos, el cálculo de expresiones aritméticas, encontrar las soluciones numéricas o simbólicas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, la creación de gráficas de funciones reales, la creación de modelos dinámicos que utilicen más de una ventana gráfica, hasta otros más avanzados que incluyen el uso de sistemas especializados. (Reyes, 2016, p.40):*

Sin embargo, las posibilidades que podemos obtener a través de un recurso dependen de aquel que sea elegido, ya que no es lo mismo contar con una calculadora científica a contar con dispositivo móvil y acceso a internet, pero también depende de la tarea o problema que se pretenda resolver. Algunos brindarán mayores herramientas, pero requerirán de mayor tiempo para aprender a usarlos, otros pueden ser muy sencillos y resultar útiles en el momento, pero ser ineficientes al querer resolver múltiples tareas.

Cuando se trata de resolver situaciones problema utilizando como medio o como apoyo un recurso tecnológico, la tecnología ayuda a encontrar diversas maneras de resolver los mismos problemas y extenderlos (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). Sin embargo, esto no quiere decir que por contar con los recursos tecnológicos siempre se podrán encontrar varias maneras de resolver el problema, ya que entre otros factores que determinaran hallar múltiples estrategias se encuentra el dominio del recurso, los recursos mentales y conocimientos de los que disponga cada sujeto.

Uno de los principales retos a los que se enfrenta la escuela en la incorporación de tecnología en las aulas es lograr que los maestros hagan un uso consciente y eficiente de las tecnologías para promover el aprendizaje de los estudiantes, quienes por su cuenta tienen un acercamiento a instrumentos tecnológicos desde la infancia, sin embargo, el uso que dan a éstos no necesariamente responde a una finalidad consciente dirigida a un aprendizaje, más bien está orientada por un uso recreativo.

Los resultados de la OCDE (2015) en cuanto al uso de computadoras y acceso a internet nos dejan visualizar que los estudiantes tienen un mayor acceso a recursos fuera de la escuela que dentro de ella. De forma específica en cuanto al uso de internet, se reporta que en México en promedio los estudiantes usan 26 minutos de internet entre semana (Lunes a Viernes) dentro de la escuela, mientras que fuera de ella 80 minutos. En cuanto a Matemáticas se refiere:

> *El nivel de uso de las TIC en las lecciones de matemáticas está relacionado tanto con el contenido como con la calidad de la instrucción. Los países y las economías donde los estudiantes están más expuestos a las aplicaciones del mundo real de las matemáticas tienden a usar más las computadoras (OCDE, 2015, p. 50) (Traducción propia).*

3.2 Dificultades y errores en la resolución de problemas

La resolución de problemas como enfoque pedagógico y principal medio para el aprendizaje de las Matemáticas en México (SEP, 2011) no está exenta de presentar complicaciones, éstas se presentan en los distintos niveles educativos tal como vemos en algunas investigaciones (Palarea, 1998; García et al., 2011). Además:

> *El origen de las dificultades se encuentra, en general, asociado a la complejidad de los objetos matemáticos implicados en el problema, teniendo que releerlo varias veces e irlo desglosando en partes; a veces tienen dificultad en determinar el orden en el que hay que aplicar las operaciones o en determinar lo que pide el problema; en su mayor parte utilizan el razonamiento de ensayo-error y la analogía (Nortes y Nortes, 2016, p. 106)*

Sin embargo los errores y dificultades presentes durante la realización de una tarea, como lo es la resolución de problemas, son de distinta naturaleza, pueden presentarse dificultades que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales (Legg y Locker, 2009) pero también más relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos (Socas, 1997; Palarea, 1998; García, 2015).

Para tener mayor claridad es necesario especificar que adoptamos la noción de dificultad en un sentido externo a las habilidades cognitivas de los estudiantes, refiriéndonos más claramente a las complicaciones del medio que se presentan durante la resolución de los problemas. Por otro lado, retomamos la noción de error en el sentido que De Castro (2012) presenta considerando al error como un resultado de la valoración que se realiza sobre la producción de un alumno al compararla con la ejecución o proceso esperado.

Palarea (1998) analiza y establece una categoría de tres errores que se presentan al resolver problemas matemáticos de álgebra, éstos son:

1. Errores que tienen su origen en un obstáculo. Estos errores se sitúan cuando el conocimiento que se tenía en su dominio de eficacia y que era utilizado para producir respuestas adaptadas a un contexto, es usado fuera de éste generando respuestas inadecuadas, generando que el dominio resulte falso.
2. Errores que tienen su origen en ausencia de sentido. Se presentan mayormente en la incomprensión de procedimientos, propiedades y reglas.
3. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales. Son errores de naturaleza diversa: faltas de concentración (excesiva confianza), distracciones debidas a la presencia de palabras claves o de rasgos perceptuales, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

Como vemos, los errores tienen procedencias distintas, pero el error en todos los casos denota la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en los estudiantes (Socas, 2011), no atribuido únicamente a un desconocimiento o un despiste momentáneo de los estudiantes mientras resuelven situaciones problema.

Método e implementación

La institución donde se desarrolló el trabajo fue una telesecundaria de turno único, matutino, ubicada en San Mateo Atenco, un municipio semiurbano del Estado de México. Entre los siete grupos de primer grado cada docente eligió a un estudiante indistintamente, de un grupo fueron elegidos dos estudiantes para para tener un total de ocho debido a que el trabajo se planteó para desarrollarse en parejas. Ningún estudiante había trabajado anteriormente con GeoGebra, así que el acercamiento planteado fue desde lo elemental y pretendiendo que fuera lo más sencillo posible.

Para el diseño de la secuencia didáctica se retoman las bases de la TSD; la secuencia didáctica que se elaboró para el análisis que se aborda en este estudio, tomó como principal eje crear situaciones adidácticas (Sadovsky, 2005) mediante una secuencia de actividades (Tabla I), las cuales fueron pensadas de forma que los estudiantes pudieran enfrentarla sin la intervención directa del profesor. Es decir, los alumnos resolvieron las tareas de la secuencia entregada en fotocopias (como una primera noción de devolución visto desde la TSD), para ello los estudiantes fueron provistos del software GeoGebra en una computadora.

Para la secuencia didáctica las actividades fueron planteadas de manera que el medio de trabajo fuera el software GeoGebra en su versión 5.0. El software se instaló en computadoras de escritorio con sistema Windows.

Para cada momento de la secuencia se dio tiempo para que los equipos leyeran el planteamiento, realizaran exploraciones y resolvieran. El avance de la secuencia no estaba sujeto a un número predeterminado de actividades que debieran realizarse estrictamente en cada sesión. Para pasar de un momento de trabajo a otro, los estudiantes debían primero concluir su trabajo, posteriormente el docente elegía un equipo para que socializara (como parte de validación del proceso) su hallazgos y solución mediante una Superficie Interactiva-Wiimote (SI-Wm) a fin de que el resto de los equipos pudieran redirigir su proceso o retomar ideas que, a su juicio, les sirvieran para terminar de resolver la actividad. La SI-Wm descrita en Bosetti et al. (2011) representa fundamentalmente un pizarrón interactivo a bajo costo y portátil que se vincula a la computadora mediante bluetooth.

Tabla I: *Estructura de la secuencia didáctica implementada*

FASE 1			FASE 2	FASE 2 COMPLEMENTO
Situación I: Para comenzar a usar GeoGebra.	Situación II: Construcción y análisis de triángulos.	Situación III: Las rectas notables del triángulo.	Situación IV: Resolución de problemas.	Recuperación de conocimientos:

Siete momentos. 1. ¿Qué es GeoGebra? 2. Aplicaciones de GeoGebra. 3. Otros componentes de la interfaz. 4. Aprendiendo a usar el pizarrón interactivo. 5. Trazos y construcciones geométricas básicas. 6. Trazos de polígonos. 7. Trazo de circunferencias.	Tres momentos. 1. Los triángulos. 2. Triángulos de medidas específicas. 3. Suma de ángulos.	Cinco momentos. 1. Definición de las rectas notables y su trazo. 2. La mediatriz. 3. La bisectriz. 4. La mediana. 5. La altura.	Tres consignas. 1. Problema de mediatriz. 2. Problema de bisectriz. 3. Problema de mediana.	Tres consignas. Problema 1. Uso de las propiedades de la mediatriz. Problema 2. Uso de las propiedades de la bisectriz. Problema 3. Uso de las propiedades de la mediana.
3 sesiones	2 sesiones	4 sesiones	2 sesiones	3 sesiones

Fuente: *Elaboración propia.*

Cabe precisar que llamamos socialización a espacios en los que los alumnos, en cierta medida, institucionalizaban algunos resultados; es decir, la fase de institucionalización, dista de la concepción original ofrecida en Sadovsky (2005). Ya que, en nuestra experiencia, el profesor si bien analiza y apoya el trabajo que los estudiantes van realizando en la búsqueda de solución, no establece ninguna conclusión; más bien, solicitaba a los alumnos que habían logrado resolver la situación problema o a quienes se habían acercado a una solución correcta, que compartieran con sus compañeros lo que realizaron.

Todas las sesiones se desarrollaron en un horario variable pero dentro de la jornada escolar. Las primeras sesiones se trabajaron en la sala de cómputo con computadoras de escritorio. Posteriormente debido a algunas dificultades técnicas, el lugar se cambió por la sala de reuniones de la institución, en el que las parejas de alumnos trabajaron con laptops.

Análisis de las dificultades y errores en la secuencia didáctica

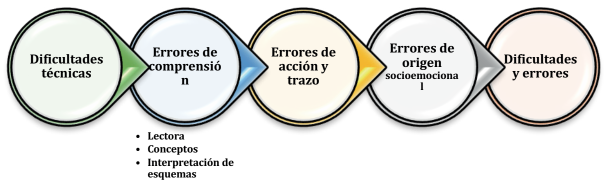
El desarrollo de la secuencia didáctica tuvo tanto aciertos y aprendizaje en los estudiantes, como dificultades y errores que, aunque lograron disminuirse están presentes y es relevante estudiarlos para comprender más a detalle los aspectos que rodean a las rectas notables de los triángulos, sobre todo cuando se estudian en un escenario donde habitualmente no suele hacerse.

Para ello comentaremos brevemente las dificultades y errores que se presentaron durante las dos fases de trabajo, poniendo mayor relevancia a la segunda fase que además de ser el objeto de estudio de esta investigación es la actividad final donde los estudiantes evocan sus conocimientos adquiridos y por lo tanto se presentan también errores. En un contexto donde los estudiantes utilizan por primera vez GeoGebra, es relevante tener en mente que el error y las dificultades se harán presentes.

A partir del análisis de los procesos de solución visualizados desde las grabaciones de pantalla de cada sesión y de cada computadora, además de las respuestas escritas de los estudiantes en su material impreso; se logran identificar dificultades y errores tanto durante el proceso de incorporación y aprendizaje del recurso tecnológico como durante la resolución de los problemas mediante GeoGebra como medio de trabajo y análisis.

Tomando como base las categorías de errores planteadas en Palarea (1998) se ha elaborado una categorización propia de errores y dificultades que se presentaron al trabajar en un ambiente enriquecido tecnológicamente. Esta categorización puede visualizarse en el siguiente esquema que será retomado para realizar el análisis respectivo:

Figura 1. *Dificultades y errores presentes durante el desarrollo de la secuencia de trabajo. Fuente: Elaboración propia.*



Las dificultades técnicas son aquellas alusivas al adecuado funcionamiento de los equipos de cómputo y el espacio en que se encuentran. Los errores de comprensión son complicaciones que se tienen derivadas de la incomprensión de una indicación o del problema escrito en cuestión, se ven reflejadas en los trazos que los estudiantes realizan en el software. También se tiene la incomprensión de los esquemas de apoyo del problema y la incomprensión de conceptos. Los errores de acción y trazo se presentan durante el manejo del software, se visualizan principalmente a través de trazos imprecisos, o al momento de seleccionar una herramienta, no se logra darle el uso funcional a ésta. Los errores de origen socioemocional: son complicaciones mayormente referidas a estados de ánimo y al plano afectivo, sin embargo, en este estudio, aunque se reconoce su presencia no son objeto de estudio y análisis.

La siguiente tabla (II) describe brevemente las dificultades y errores presentes durante la implementación de la Fase 1 de la secuencia didáctica, hecho que nos permite comprender de forma más clara la manifestación de cada una de ellas de acuerdo con la clasificación arriba comentada

Tabla II: *Dificultades y errores en las tres primeras situaciones.*

Dificultad o error	Situación I	Situación II	Situación III
Dificultad Técnica	Las computadoras de dos equipos funcionaban con bastante lentitud, generando incluso un sobreposicionamiento de las ventanas de Windows.		Al utilizar laptops con cortafuegos cada sesión tuvo que instalarse GeoGebra y el Screen recorder.
Error de Comprensión	Se presentan en el momento siete, cuando los estudiantes no comprenden el problema presentado y generan trazos y respuestas que no en todos los casos se acercan al establecimiento de la respuesta correcta.	No distinguen los triángulos equilátero, isósceles y escaleno, al trazarlos tienen complicaciones.	No saben que es una recta perpendicular, aunque preguntan su definición trazan segmentos o rectas que no corresponden con ésta. Cuando se les pide determinar el circuncentro, incentro y baricentro, no atribuyen que trazo les es de utilidad para determinarlos. Al pedir trazar las mediatrices, atribuyen en un primer momento que sólo hay una.
Errores de acción y trazo	Al trazar un polígono los estudiantes no dan clic en el	No logran trazar un segmento de medida	En los triángulos no logran trazar las tres bisectrices, se les

	punto inicial para cerrar la figura, por lo tanto, el polígono no se genera. Al intentar desplazar o medir longitudes tienen activada otra herramienta, por lo que no pueden ejecutar la acción deseada, pero también al medir longitudes dan clic en el mismo punto generando una distancia de cero unidades. De forma generalizada los equipos no logran medir ángulos, se les dificulta seleccionar los elementos necesarios para hacerlo.	especifica, lo hacen por aproximación mediante el arrastre de los puntos. Al intentar trazar un triángulo de medidas específicas, o una circunferencia sólo lo hacen por aproximación, no usan las herramientas adecuadas. Al medir ángulos obtienen medidas pero externas al no elegir en un sentido horarios los puntos que lo conforman.	dificulta en elegir los puntos o los segmentos necesarios. Al no haber una herramienta llamada altura los estudiantes no logran por ellos mismos trazar ésta recta, seleccionan distintas herramientas y hacen trazos aproximados. Al medir ángulos sólo miden dos. El tercero se dificulta por no saber qué puntos elegir.

Fuente: *Elaboración propia.*

En la Situación IV correspondiente a la fase 2, se presentan tres problemas (Figura 2) donde para determinar la respuesta los estudiantes deben utilizar el trazo y las propiedades de las rectas notables del triángulo. Las imágenes de los problemas ya se encuentran insertadas en el espacio de trabajo de GeoGebra, los estudiantes luego de abrir la aplicación se enfocan en determinar un adecuado proceso de solución al problema planteado. Los procesos de solución son distintos y con características distintas en cada equipo, pero ya que el énfasis de análisis son las dificultades los procesos de solución no son objeto de análisis en este texto.

En el problema uno para determinar su solución esperada se requiere ubicar el circuncentro, el cual representa el centro de una pieza circular de un calendario azteca que se encuentra fragmentado y del que se requiere determinar la medida de su radio. El problema dos requiere determinar el baricentro, punto que representa la solución al problema en el que se pide determina el lugar en un mapa donde debe colocarse una nueva planta de Luz de forma que esté a la misma distancia de 2 calles para que la luz sea distribuida de forma eficiente. El tercer problema requiere determinar el baricentro, punto que es el centro de gravedad del cual se balancearán dos péndulos hechos de una placa de plata en forma triangular.

Figura 2. *Ilustración de los problemas de la secuencia didáctica.*

Ante el problema uno los equipos tienen errores, sin embargo, la comprensión de lo que requiere el problema es bastante claro ya que sus procesos de solución se enfocan en determinar la medida del radio del calendario azteca. En general los equipos presentan dificultades de acción y trazo, principalmente en el uso de tres herramientas *mediatriz, bisectriz y perpendicular*, debido a que no tienen o no seleccionan como referencia puntos definidos, que son necesarios para ejecutar la herramienta correspondiente, por lo que, al dar clic, no se generan los trazos que esperan. En algunos casos cuando éstos se generan no corresponden al trazo o se ubican en un lugar distinto al esperado al no elegir los puntos adecuados.

Ante el segundo problema los estudiantes siguen presentando dificultades en el uso de las mismas herramientas, ello debido a que inicialmente no marcan puntos de referencia para ejecutar la herramienta, cuando se percatan de que deben colocarlos, la dificultad desaparece temporalmente. La dificultad que se mantiene en todos los equipos es en el trazo de rectas perpendiculares, ahora se hace evidente que los estudiantes no eligen los elementos indispensables para su trazo (un punto y una recta), eligen puntos arbitrariamente, generando que su trazo no corresponda con lo esperado o que el software no reconozca el comando de uso de la herramienta. Esto inicialmente marca por un lado una dificultad en el uso de la herramienta (error de acción y trazo), pero por otro lado la incomprensión del concepto perpendicular (error de comprensión), ya que al preguntar a los estudiantes las características de este concepto, evidencian la incomprensión, hecho que genera dificultades y lleva al docente a cargo a explicar la definición a los estudiantes.

Ante el tercer problema las dificultades se minimizan, el problema textual se comprende pero los estudiantes inicialmente no atribuyen la resolución del problema al trazo de las medianas (Error de comprensión, visto como la ausencia de sentido en Palarea, 1998), utilizan los trazos que les han sido de utilidad anteriormente, como el trazo de las bisectrices en donde presentan errores de acción y trazo, ya que únicamente dan clic sobre dos puntos, siendo necesarios tres o elegir los dos segmentos que conforman el ángulo.

Discusión y conclusiones

El uso de recursos tecnológicos para la resolución de problemas y en general para el estudio de un tema, brinda distintos recursos a los estudiantes, puede ofrecerles una ventana importante de herramientas para observar y examinar las conexiones y las relaciones que se vuelven relevantes durante el proceso de resolución de un problema matemático.

Sin embargo, observar y analizar a través de un artefacto o software no es tan fácil como parece. Cuando se usa un nuevo software, como GeoGebra, su uso no presenta beneficios inmediatos, requiere práctica constante y una apropiación de las funciones y herramientas para poderlo utilizar como una herramienta de la mente.

Las dificultades que se dan entre el tiempo en que se aprende a usar el software y el tiempo en que se usa ya para realizar modelaciones, diagramaciones, etc., donde la prioridad es el análisis de las propiedades más que el trazo de un objeto matemático es poco estudiado. En el estudio de las propiedades y resolución de problemas sobre las rectas notables en un ambiente donde GeoGebra es el medio de trabajo se presentan también expectativas y complicaciones. Pese a que GeoGebra se presenta como un software bastante intuitivo, los resultados muestran que en estudiantes de primer grado de secundaria, quienes por primera vez usan este software resulta un proceso complejo lleno de retos y dificultades.

A través de este artículo se logra analizar y categorizar los principales errores que se presentan durante la implementación de una secuencia didáctica (diseñada desde la Teoría de situaciones didácticas) enfocada en la resolución de problemas y tareas concernientes a las rectas notables de los triángulos. Las categorías desprendidas del análisis son cuatro: dificultades técnicas, los errores de comprensión, errores de acción y trazo.

Se visualiza que los errores más predominantes al enfrentar a los estudiantes a la tarea de resolver problemas geométricos y solucionar tareas (situación de acción vista desde la TSD) sobre las rectas notables de los triángulos son errores de acción y trazo, donde se usa el recurso tecnológico GeoGebra. Hay herramientas que son más fáciles de utilizar ya que no requieren de elementos adicionales, como el caso de la herramienta *punto*, sin embargo, hay herramientas que presentaron complejidad en el uso, entre ellas la herramienta *perpendicular*, que requiere seleccionar un punto y un segmento o recta para que se genere. La selección imprecisa de los elementos para que una herramienta genere un trazo se vuelve la principal dificultad de implementación.

Otro error relevante y que se relaciona directamente con el anterior es el error de comprensión, el cual se presentó en distintos momentos. Comenzó por un error en la comprensión lectora, donde la falta de comprensión de lo que el problema o tarea pedía llevó a errores en las respuestas. Paulatinamente los estudiantes mostraron una comprensión de los problemas y tareas, pero se visualizó una adecuada incomprensión de los conceptos, principalmente de mediatriz, bisectríz y altura. Este hecho generó la imposibilidad de plasmar ese saber en la realización de un trazo con GeoGebra. Si no se tiene en mente lo que se pretende trazar o el objeto matemático que se pretende representar, esto se genera una barrera que imposibilita la solución de problemas.

El manejo de un recurso tecnológico para el aprendizaje requiere tiempo para irse apropiando del hasta utilizarlo con soltura, convirtiéndose en un instrumento, tal como vemos en Santos-Trigo y Moreno-Armella (2016, p. 189) ''Una tecnología cognitiva deja rastros en nuestra mente a través de trabajo constante y después de un tiempo se convierte en parte de nuestros recursos cognitivos''. Entonces se requiere de ciclos de práctica y discusión para poder utilizar un recurso con habilidad y así la comprensión de un objeto matemático pueda plasmarse a través de un recurso como GeoGebra para ser estudiado a detalle.

Referencias

Arteaga, R. y Sánchez, A. (2013). *Trabajo en Proceso 1. Matemáticas.* México: Oxford University Press.

Artigue, M., y Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM Mathematics Education*, 39, 365–382. doi: 10.1007/s11858-007-0048-x

Bosetti, M., Pilolli, P., Ruffoni, M., y Ronchetti, M. (2011). Interactive whiteboards based on the WiiMote: Validation on the field. *In 14th International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL2011)—11th International Conference Virtual University* (pp. 269–273). Kassel: Kassel University Press. doi: 10.1109/ICL.2011.6059588

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. y Nobre S. (2016). Youngsters solving mathematical problems with technology. The results and implications of the Problem@Web Project. *Mathematics Education in the Digital Era*, *5*. Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-24910-0

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Editores.

De Castro, C. (2012). *Estimación en cálculo con números decimales: dificultad de las tareas y análisis de estrategias y errores con maestros en formación*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J.L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M.C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011* (pp. 145-155). Granada: Universidad de Granada.

INEE (s.f). *Matématicas Planea 2015. 6º de primaria, 3º de secundaria.* En. García, S. México: INEE. Recuperado de: http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2015/difusion_resultados/1_Resultados_nacionales_Planea_2015.pdf

Legg, A. y Locker, L. (2009). Math performance and its relationship to math anxiety and metacognition. *North American Journal of Psychology.* *11*(3). Recuperado de http://digitalcommons.georgiasouthern.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1428&context=etd

Nortes, R. y Nortes A. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. *Revista de Investigación Educativa*, *34*(1), 103-117.

OCDE. (2015). *Students, Computers and Learning. Making the connection*. Paris: OECD Publishing.

Palarea, M.M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de La Laguna, Tenerife, España.

Reyes, I. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales.* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav, México.

Reyes, L. E., y Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 543-551). Salamanca: SEIEM.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sánchez A., Martínez, J. y Andrade, E. (2016). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe de resultados EXCALE 09 Aplicación 2012. Español, Matemáticas, Ciencias y Formación Cívica y Ética.* México: INEE. Recuperado de: https://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/D/315/P1D315.pdf

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009). Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergratuade Studies,* 19 (3), 260-279. doi: 10.1080/10511970701641990

Santos-Trigo y Moreno-Armella (2016). The use of digital technology to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatick (Eds.), *Posing and Solving Mahtematical Problems* (pp.189-2007). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3_12

Santos-Trigo, M. (2014). *Problem solving in mathematics education. Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8_129

Santos-Trigo, M. y Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technology in learning environments. In L. Uden et al. (Eds.), *Learning technology for Education in Cloud. MOOC and big data,* pp. 61-71. Communication in Computer and Information Science, 446. NY: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-10671-7_6

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space Framework. *ZDM*, 1-16. doi: 10.1007/s11858-016-0757-0

SEP (2006). *Matemáticas I. Libro para el maestro. Telesecundaria*. México: ILCE.

SEP. (2011). *Plan de Estudios 2011*. Educación Básica. México: SEP.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125- 152). Barcelona: Horsori.

Socas, M.M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. Educatio Siglo XXI, 29(2), 199-224.

VOL 35, NÚMERO 2, AÑO 2022

ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN A ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

TEACHING VOLUME CONCEPT TO VISUALLY IMPAIRED STUDENTS

ENSINANDO O CONCEITO DE VOLUME A ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Rubén Abraham, Moreno-Segura

Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Ciencias, San Luis Potosí, México.

Correo: abram.moreno@cinvestav.mx

Orcid: 0000-0002-9767-8779

Soraida, Zúñiga-Martínez

Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Ingeniería, San Luis Potosí, México.

Correo: soraida_zuniga@hotmail.com

Orcid: En construcción.

Resumen

La educación matemática suele ser de manera visual la mayoría del tiempo, además que se transmite de manera tal que no se dota de significados y se alude a la memorización de fórmulas y conceptos propiciando que sean conocimientos no significativos. En este escrito se reporta los resultados referentes al concepto de volumen de una primera implementación de un conjunto de secuencias didácticas basada en la teoría Van Hiele, así como material para enseñar a alumnado con discapacidad visual (personas ciegas o con baja visión) los conceptos de volumen y densidad. La investigación es de carácter cualitativo y se llevó a cabo en una población de seis estudiantes de primer y segundo semestre de preparatoria (abierta y en línea). Los resultados de dicha aplicación muestran que el alumnado es capaz de proponer sus propias definiciones de conceptos relacionados, clasificaciones y deducir algunas fórmulas de volumen de cuerpos regulares con ayuda del material adecuado, por lo que se considera que el aprendizaje de los estudiantes fue adecuado, dando pie a nuevas implementaciones.

Palabras clave: Volumen, Discapacidad visual, Teoría Van Hiele, Educación inclusiva

Abstract

Mathematics education is mainly visual. Besides, it is taught in such a way that meanings are not provided, instead memorization of formulas and concepts are used, giving rise to non-meaningful knowledge. This paper reports the results with respect to volume concept in a first implementation of a set of didactic sequences based on Van Hiele Theory, as well as material aids to teach visually impaired students (blind or with low vision people) volume and density concepts. This is a qualitative research, carried out with six students from the first and second semester of the preparatory course (open and on line). The findings show that students are able to propose their own definitions of related concepts, and classifications, as well as to deduce some volume formulae of regular bodies with the aid of the appropriate material. So it is considered that students' learning was adequate, giving rise to new implementations.

Keywords: volume, impaired vision, Van Hiele Theory, inclusive education.

Resumo

A educação matemática costuma ser de maneira visual a maioria do tempo, além de se transmitir de maneira tal que não se atribui significados e se faz alusão à memorização de fórmulas e conceitos, propiciando que sejam conhecimentos não significativos. Este trabalho relata os resultados referentes ao conceito de volume de uma primeira implementação de um conjunto de sequências didáticas, baseadas na teoria de Van Hiele, bem como material para ensinar a estudantes com algum tipo de deficiência visual (visão cega ou baixa) os conceitos de volume e densidade. A pesquisa é qualitativa e foi realizada em uma população de seis estudantes do primeiro e segundo semestres do Ensino Médio (aberta e on-line). Os resultados da referida aplicação mostram que os estudantes são capazes de propor suas próprias definições de conceitos relacionados, classificações e deduzir algumas fórmulas de volume de corpos regulares com ajuda do material adequado, então se considera que a aprendizagem dos estudantes foi adequada, dando origem a novas implementações.

Palavras-chave: Volume, Deficiência visual, Teoria de Van Hiele, Educação inclusiva.

Introducción

En el siguiente artículo de investigación hay seis apartados principales, dentro de ellos y en esta primera sección se hace referencia a una colección de resúmenes breves de investigaciones previas relacionadas con la enseñanza del volumen en alumnos con ceguera y/o debilidad visual (discapacidad visual) como parte de los antecedentes, además de presentar las preguntas de investigación y los objetivos. En la fundamentación teórica se presentan las teorías que dirigen este trabajo de investigación que son, la teoría psicogenética de Piaget e Inhelder (1982) y la teoría Van Hiele. Posteriormente se muestra la metodología usada que es Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) donde se presenta los aspectos utilizados, continuando con los resultados más relevantes de una primera aplicación, finalizando así con las conclusiones obtenidas hasta el momento y las referencias utilizadas.

Para Andrade (2010) no existe relación directa entre la ceguera y los problemas en el aprendizaje en el área de matemáticas, esto es, el estudiante ciego/con baja visión podrá hacer la gran mayoría de las cosas que hace una persona sin este tipo de discapacidad, sólo que con un mayor esfuerzo y tiempo. Por otro lado, Fernández del Campo (1986) afirma que la falta de visión no es impedimento para conocer los aspectos matemáticos de la realidad, que lo único en lo que cambia es el método de transmisión de los conocimientos matemáticos. Los medios, instrumentos y técnicas serán determinados por el nivel de visión del alumnado, pero no serán exclusivos ni excluyentes de ser utilizados en otros casos. Además, Flores y Lis Vilar (2014) dicen que la manera en la que se presenten los contenidos a este tipo de estudiantes deben ser planteados de manera clara para que concentren toda su energía en comprender los conceptos y no en tratar de decodificar la simbología utilizada. Ahora bien, en geometría, Martínez y Ordaz afirman que la visualización, es decir, la habilidad de crear imágenes mentales y abstraer información de ellas, es un factor que dificulta el aprendizaje en geometría, y a partir de este concepto realizaron una investigación con la que concluyeron que las personas ciegas visualizan a partir del tacto activo (2015). Esto es “el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en personas ciegas y débiles visuales es muy difícil debido a las abstracciones y formas visuales que esto representa” (Espinoza, 2015, p. 16). Ahora bien, si las experiencias de aprendizaje son ricas, el estudiantado puede desarrollar el concepto de volumen antes de la instrucción formal de dichos temas (Klopfer et al., 1992 en Dawkins et al., 2008).

De lo anteriormente presentado se tiene que debido a la falta de información y capacitación por parte de la gran mayoría de las personas responsables de los ámbitos educativos se provoca que las personas con discapacidad visual no adquieran los conocimientos necesarios para su desarrollo escolar, en particular de nociones matemáticas. La importancia de esta investigación es proponer una metodología útil para la enseñanza de del concepto de volumen que permita un aprendizaje por parte del alumnado del concepto de volumen, todo esto motivado por la dificultad para transmitir los conocimientos matemáticos de manera eficiente al estudiantado de preparatoria en el Instituto para ciegos y débiles visuales “Ezequiel Hernández Romo” en la capital del Estado de San Luis Potosí, México.

Este trabajo parte inicialmente de la pregunta: “¿Cómo se puede mejorar el aprendizaje del concepto de volumen a nivel preparatoria, en estudiantes ciegos/con baja visión?” de la cual suponemos que su respuesta es que, se puede mejorar a través de experiencias previas de ellos/ellas, dotando de nuevos significados a cosas que ya conocen o que pueden manipular de manera háptica con cierta facilidad y aprovechando su gran capacidad de memoria. Así también surgen otras preguntas de investigación como: ¿Qué definiciones relacionadas con los temas de volumen logran proponer los y las estudiantes?, ¿qué tanto se asemejan o diferencian las definiciones que proponen con las definiciones formales?, ¿qué ocurre con el estudiantado con discapacidad visual al trabajar con un modelo basado en la teoría Van Hiele? , y ¿qué es necesario para que los estudiantes adhieran nuevos conceptos a su estructura cognitiva?

Los objetivos de la investigación se dividen en un general y uno específico.

O_g: Analizar en qué nivel de los propuestos por Van Hiele se encuentran los estudiantes de hasta tercer semestre de preparatoria (abierta y en línea) del Instituto para Ciegos y Débiles Visuales "Ezequiel Hernández Romo" (IPACIDEVI) en relación con el concepto de *volumen* y diseñar una propuesta metodológica para la enseñanza de dichos conceptos usando los niveles y fases propuestas por los Van Hiele en el semestre 2018-A.

O_e^1: Intentar que con la secuencia didáctica el alumnado logre posicionarse en un nivel dos: deducción informal y estimar los alcances de la propuesta usando ingeniería didáctica.

Fundamentación teórica

En este apartado se presentan las dos teorías que se utilizan para sustentar la investigación las cuales son la teoría psicogenética de Piaget y la teoría Van Hiele de la enseñanza de la geometría.

Teoría psicogenética

Rosa y Ochaíta (1993) hacen un análisis comparativo a través de los estadios de desarrollo propuestos por Jean Piaget del desarrollo psicológico de infancias con ceguera congénita y aquellas sin discapacidad visual, afirmando que existe un atraso de tres años para la conservación del peso y volumen, por lo tanto, al tener un punto de referencia del desarrollo cognitivo de estudiantes con discapacidad visual de acuerdo con su edad se eligió dicha teoría como teoría general. Desatacando los aspectos que se utilizaron.

La teoría psicogenética de Piaget e Inhelder (1982) pretende describir como los sujetos pasan de un estado de conocimiento a uno mayor, es decir, "pasan por una secuencia invariable a través de unas etapas universales de desarrollo cognitivo" (Buitrago Reyes, 2013, p. 30). Ghazi y Ullah, (2016) mencionan que "la teoría de Piaget sobre el desarrollo cognitivo consta de cuatro etapas: Sensoriomotora: (desde el nacimiento hasta los 2 años), Preoperacional: (de 2 a 7 años), las operaciones concretas: (de 7 a 11 años), y de las operaciones formales: de 12 a 16 años)."

Para Piaget (1982) en la etapa de operaciones concretas se consiguen las operaciones lógico – matemáticas y operaciones espaciales, es decir, el/la infante es capaz de tener un pensamiento reversible y por lo tanto tiene la habilidad de conservación, en otras palabras, es capaz de partir de un punto, realizar ciertas operaciones y llegar a un nuevo punto y de regresar al punto de origen llevar a cabo las operaciones contrarias a las de un inicio. Además de tener la habilidad de realizar una clasificación jerárquica más apropiada que en el estadio anterior y de seriar según un criterio establecido.

Entonces, a pesar de haber adquirido una conciencia de su entorno y un desarrollo cognitivo más amplio sigue presentando limitaciones como que los niños funcionan de manera lógica y únicamente organizada con información concreta, es decir, no funcionan con información abstracta que no tiene presencia en su realidad. También que no alcanzan los principios lógicos generales y por ende no pueden aplicarlo a todas las situaciones, en otras palabras, desarrollan estos principios para cada problema en el que se encuentran.

En la etapa de operaciones formales se inicia un pensamiento lógico – abstracto, es decir, ya no es necesario tener los objetos presentes para poder operar con ellos además lograr un razonamiento sobre lo real y lo posible y se analiza a partir de una teoría general que pueda incluir todos los aspectos o factores que puedan influir a través de un pensamiento ya sea deductivo o inductivo, que por lo tanto surgen hipótesis sobre lo que podría ocurrir y se aceptan o se rechazan para reformulan, según sea necesario para poder llegar a una conclusión. Es importante enfocarse en ambos estadios ya que se trabajó con personas de quince a diecisiete años, por lo cual, en inicio deberían ya haber alcanzado la última categoría propuesta por la teoría, pero teniendo en cuenta el retraso mencionado por Rosa y Ochaíta (1993), podrían aún encontrarse en operaciones concretas en cuanto a su desarrollo cognitivo.

◆ Teoría Van Hiele

En 1957 en Holanda, Pierre y Dina Van Hiele propusieron el modelo de los niveles de pensamiento con el fin de desarrollar en el alumnado de la escuela elemental el *insigtht* en la geometría apoyados principalmente en la teoría genética de Piaget con sus estadios de desarrollo. (De la Torre, 2013). Por lo que está fue la razón de elegir esta teoría como sustento teórico desde la matemática educativa, al ser una teoría basada en la psicogenética de Piaget, que es la teoría de educación general de esta investigación y por ser exclusiva de la geometría, rama de las matemáticas que se abordará. A continuación, se presenta un resumen de los aspectos generales de dicha teoría.

Dicho modelo posee dos aspectos, el primero de ellos que es descriptivo ya que explica las formas en que razona el estudiantado a través de cinco niveles propuestos, los cuales se presentan en la Tabla I, los cuales fueron utilizados para analizar las respuestas de las personas informantes y posicionarles en alguno de ellos de acuerdo a las características que se mencionan a continuación.

Tabla I: *Niveles de asimilación según los Van Hiele.*

Nivel	Descripción
Nivel 0: Visualización	Considera los conceptos o figuras en su globalidad. No toma en cuenta los elementos y sus propiedades.
Nivel 1: Análisis	En este nivel surge el descubrimiento y la generalización de propiedades, a partir de la observación de algunos casos.
Nivel 2: Deducción informal	La comprensión y la posibilidad de establecer relaciones a través de implicaciones simples entre casos.
Nivel 3: Deducción formal	Se efectúan las demostraciones formales, usos de axiomas, postulados, etc.
Nivel 4: Rigor	Cuando el razonamiento es deductivo, sin ayuda de la intuición.

Fuente*: Lastra Torre, 2005, pp. 22-23*
Interpretación: Propia

El segundo aspecto de la teoría es que es prescriptivo debido a que presenta una metodología propuesta, que se aplica de manera general a cada uno de los cinco niveles ya presentados, para planificar las actividades y que el alumnado pueda acceder al siguiente nivel. Las fases se presentan en la Tabla II y fueron usadas para el diseño de las secuencias didácticas.

Tabla II. *Fases de la metodología Van Hiele.*

Fase	Descripción
Fase 1. Información	El profesorado debe diagnosticar lo que saben el estudiantado sobre el tema que se va a abordar y la forma de razonar que tienen. Éstos últimos entran en contacto con el objetivo propuesto.
Fase 2. Orientación dirigida	El profesorado debe guiar el proceso para que el alumnado vayan descubriendo lo que va a constituir el centro de este nivel. Esta fase es el centro del aprendizaje, que le va a permitir pasar al otro nivel, y construir los elementos propuestos.
Fase 3. Explicitación	El alumnado debe estar consciente de las características y propiedades aprendidas anteriormente y consolidan su vocabulario.
Fase 4. Orientación libre	Afianzar los aspectos básicos y las actividades que permitan resolver situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos anteriormente.
Fase 5. Integración	Tiene por objetivo establecer y completar las relaciones que profundicen el concepto.

***Fuente**: Lastra Torre, 2005, pp. 23-24*
Interpretación: Propia.

Además de los niveles y fases ya mostrados cabe enfatizar ciertas características de la teoría tales como la secuencialidad de los niveles y las fases, esto es, se tiene que respetar el orden establecido ya que un alumno no puede, por ejemplo, entender algo del Nivel Tres si no ha pasado por el Nivel Dos. De misma forma con las fases, tienen que ser presentadas en el orden propuesto para que los alumnos, una vez finalizada la Fase Cinco, puedan acceder al siguiente nivel. También hacen hincapié en que el lenguaje empleado durante el proceso de aprendizaje debe estar al nivel de comprensión del alumnado además de la significatividad de los contenidos, *i.e.,* los contenidos tienen que ser presentados de acuerdo al nivel de razonamiento en el que se encuentren los estudiantes, así como que los contenidos deben ser presentados de manera continúa sin interrupciones o períodos de ausencia y especialmente de manera cíclica de acuerdo a los niveles en los que vaya avanzando el alumno, aumentando la complejidad dependiendo de esto último.

Al ser una teoría basada en el constructivismo de Piaget, aparte de los estadios o niveles de desarrollo, pretende incentivar la autonomía de los alumnos.

Metodología

En esta sección se presenta la metodología que se utilizará para el desarrollo de esta investigación cualitativa (Garrido, 2009) en didáctica de las ciencias. La metodología se llama Ingeniería Didáctica, la cual fue propuesta por Michèle Artigue y se tomará por completo en la realización del trabajo.

◆ Ingeniería didáctica

La Ingeniería Didáctica (ID) resalta dos aspectos que son:

- Por un lado, desprenderse de relaciones entre investigación y acción, pensadas sea en términos de innovación, sea con la intermediación de la noción de investigación acción, para afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos.
- Y del otro, resaltar la importancia de la "realización didáctica" en clase como práctica investigativa, tanto por razones vinculadas al estadio de juventud de la investigación didáctica, como para responder a necesidades permanentes de poner en práctica las construcciones teóricas elaboradas (Artigue, 1995, p. 36).

La ID se identifica por la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995), es decir, se preocupa por las maneras de enseñar desde cómo se originan, se aplican y los resultados obtenidos a partir de estas. Los resultados obtenidos se validan de forma interna, esto es, no es necesario el uso de un grupo control para comparar y contrastar los resultados obtenidos después de haber utilizado cierta metodología, sino que la validación se obtiene de la confrontación de los resultados obtenidos durante el análisis a priori contra los del análisis a posteriori. Debido a las características de la población en la que se realiza el estudio es complicado encontrar otro grupo con condiciones similares, por lo que la validación interna resulta adecuada para este trabajo.

Las fases que componen a la ID son:

- Análisis preliminares. Se llevan a cabo desde tres puntos de vista que son la didáctica, el cognitivo y el epistemológico. Es decir, esta etapa se preocupa por conocer los conocimientos previos necesarios, así como el cuadro teórico didáctico general del tema o temas a enseñar (Godino, 2013).
- Análisis a priori. Se basa en un conjunto de hipótesis de los posibles resultados que tendrá la aplicación de las estrategias planeadas considerando los análisis preliminares, que serán sometidas a validación en la confrontación que se lleva a cabo entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. Se realizó un examen para conocer la habilidad procedimental de los estudiantes al momento de resolver problemas que impliquen el cálculo de volumen a través de fórmulas y un grupo focal para conocer sus ideas, creencias y opiniones respecto al tema.
- Experimentación. es la etapa en la que se llevan a cabo las situaciones didácticas, así como el registro de las observaciones realizadas en la experimentación. Se diseñó una secuencia didáctica de ocho sesiones basada en las fases propuestas por los Van Hiele (Tabla II) en las que se abordaba al inicio propiedades cualitativas de volumen para establecer las bases del concepto y finalizaba con la clasificación de cuerpos geométricos regulares, así como el cálculo de volumen a través de fórmulas.
- Análisis a posteriori. Se confrontan los datos y observaciones obtenidas durante la experimentación con las hipótesis y datos del análisis a priori para poder evaluar si las situaciones didácticas lograron provocar

un conocimiento o avance en los alumnos en el tema planeado. En esta parte se aplicó de nuevo el examen y el grupo focal para comparar y contrastar con los resultados obtenidos en el análisis a priori.

Instrumentos de recolección de datos

- Encuesta: La encuesta es la aplicación de un procedimiento estandarizado para recolectar información –oral o escrita– de una muestra de personas acerca de los aspectos estructurales; ya sean ciertas características sociodemográficas u opiniones acerca de algún tema específico. La información se recoge de forma estructurada y el estímulo es el mismo para todas las personas (Cea D’Ancona, 1996: 240 en Sautu et al., 2005, p. 48).

Las encuestas que se han aplicado a la población es un examen con respuestas abiertas como cerradas, que son aplicados de manera oral a los estudiantes debido a la falta de conocimiento de braille por parte de los investigadores, además de que no todos los alumnos lo manejan. Constan de cinco preguntas sobre el cálculo de volumen de cuerpos geométricos regulares, así como la manera en la que se clasifican. Se aplicó el mismo examen en dos momentos, a priori y a posteriori a la implementación de la secuencia didáctica.

- Grupo focal: El grupo focal de discusión centra su interés en un punto específico de la investigación y la discusión ya que busca el acto discursivo y la contrastación de las opiniones de sus participantes por medio de la interacción, el diálogo y el intercambio. Es un método de investigación centrado en la riqueza plural de sus integrantes en un tiempo relativamente corto (Escamilla Gil, 2016, p. 3).

Por lo tanto, el grupo focal será utilizado para comparar y contrastar las opiniones de los participantes en dos momentos de la investigación, al inicio (a priori) y al culminar (a posteriori) para identificar los cambios que pueden o no presentar los estudiantes respecto al tema de volumen con la implementación de la secuencia didáctica. }

Grabación de audio y de vídeo: Las clases, entrevistas, cuestionarios y análisis a priori y a posteriori fueron grabados en audio y vídeo para posteriormente transcribirlos y así facilitar el análisis de la aplicación, respuestas y comportamiento de los alumnos.

Participantes

Los participantes son seis estudiantes que pertenecen a un grupo en donde se encuentran mezclados prepa en línea y preparatoria abierta en sus diferentes semestres con discapacidad visual (personas ciegas o com baja visión) del Instituto para Ciegos y Débiles Visuales “Ezequiel Hernández Romo” (IPACIDEVI) localizado en la capital del estado de San Luis Potosí, México. Los participantes son de primer y segundo semestre en ambas modalidades, tres son de prepa en línea y tres de prepa abierta, tres ciegos y tres débiles visuales, cinco hombres y una mujer.

Resultados y discusión

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de una primera aplicación del conjunto de secuencias didácticas diseñadas y de las técnicas consideradas para esta investigación que es un examen y un grupo focal, en sus dos momentos un a priori y otro a posteriori. Cabe mencionar que se distinguirá los comentarios de los alumnos rescatados de la aplicación de la secuencia colocando los comentarios en cursiva. Se omitirán nombres por razones de confidencialidad, pero se usará una letra designada de manera aleatoria para distinguir los comentarios de cada estudiante.

Volumen

Primeramente, el alumnado logró distinguir que la forma y el volumen están relacionados, pero que diferentes formas pueden contener el mismo volumen.

C: Son del mismo tamaño, pero no tienen la misma forma. Es que esta lo único que tiene es que se reduce un poco de aquí, pero se compensa con esto que esta igual de grande. Entonces yo digo que es lo mismo.

Yo digo que el volumen sí. No sé cómo explicarlo. Pues es que son casi la misma forma. Yo creo que si son el mismo [volumen].

F: Son iguales. Solo que son diferentes formas. [el volumen depende] De los tamaños y de como sea.

P: Lo que le cabe a una o a otra por la altura del volumen. Porque otra botella puede estar muy larga, esta, pero larga y le puede caber lo mismo que a una ancha.

Es decir, los estudiantes de la muestra ya están considerando aspectos y características del volumen (Lastra Torre, 2005), logran discriminar entre formas y tamaños, que dos o más contenedores con diferentes formas pueden tener el mismo volumen, pero que se mantiene cierta relación entre sus dimensiones, como cuando mencionan que se “compensa” una parte con otra, o las botellas “largas y anchas”. Se observa que el estudiantado empieza a migrar del nivel de visualización, al de análisis, al estudiar un número reducido de casos donde la forma era independiente del volumen.

El alumnado también presentó cierta confusión al utilizar un bloque para armar (*Lego*) como unidad de medida, al tratar de calcular el volumen de ciertas cajas como se muestra en sus siguientes comentarios.

F: ¿Si se mide así? ¿Así acostadito? ¿Cómo se medirá?

C: Ponerlos bien acomodados.

F: Pero ¿cómo medirías esto?, ¿así o así?

C: Es que como sea es lo mismo.

F: Porque de este lado va a ser más y de este lado va a ser menos.

Se presenta un desequilibrio en su estructura cognitiva al cuestionarse de la manera correcta de medir un volumen usando determinada unidad de medida, si es conmutativa o no la manera en la que lo estaba midiendo (primero el ancho y después el largo). Un compañero le ayuda a superar el desequilibrio diciéndole que no importa que mida primero si el ancho o el largo, con que la unidad de medida este bien acomodada va a resultar lo mismo. Esto para Piaget (1986) la interacción entre sujetos de diferentes niveles de desarrollo mental interactuando, en este caso en una discusión ayuda a explicar la elaboración del concepto, enfatizando que es un hecho que se debe explicar y no sólo invocar. Además, siguiendo apoyados en esta idea se presenta otra situación donde ahora los papeles se invierten entre esos dos estudiantes (*F, C*), ayudándose a la hora de mencionar cual fue el resultado de su cálculo, ya que uno de ellos sólo calculo las longitudes del largo, ancho y altura y el otro armó toda una estructura que “rellenaba” el volumen y la caja como se muestran en las Figuras I y II.

***Figura I:** (F) midiendo las longitudes de la caja para poder calcular su volumen*.

***Figura II:** (C) llenando toda la caja de bloques para después contarlos uno por uno.*

Como se puede observar en las fotografías y en sus comentarios, (*C*) y (*F*) utilizaron diferentes métodos para calcular el volumen de sus respectivas cajas, empero (*C*) al conocer el método de sus compañeros cambia de estrategia con la ayuda de (*F*), es decir, produce una acomodación (Bendersky, 2004). de ese método al ayudarlo a medir las longitudes del largo, ancho y alto para después multiplicarlo y obtener el total.

Pese a que al final de esta actividad todos estaban de acuerdo con que el método de sólo medir las longitudes era el óptimo de los que realizaron se sintieron con la necesidad de ser más exactos con sus cálculos externando que midiendo ahora con reglas o sabiendo las medidas de los bloques para armar serían más precisos con sus resultados.

En la investigación desarrollada se pudo notar que existe una confusión en los estudiantes entre el concepto de volumen y masa, los cuales son conceptos diferentes, pero que en algunas circunstancias ellos los toman como iguales. Por la razón anterior dentro del grupo de secuencias didácticas planteadas e implementadas en el aula se les cuestionaba acerca de lo que sucedía con la masa, (ya que algunos de los propios estudiantes hablaban de dicho concepto) para así aclarar las malas concepciones que se tenían o se podrían tener al respecto de este.

El estudiantado muestra estar en el estadio de operaciones formales (Ghazi y Ullah, 2016) al poder al poder diferenciar el hecho de que la masa se conserva a pesar del cambio del volumen en un cuerpo, tal cual como lo observaron al cambiar la forma a dos barras de plastilina que ellos mismo manipularon. Dicha manipulación produjo ciertas confusiones al inicio como se observa a continuación:

C: No, no cambia el volumen. No, pues al principio eran iguales sólo que le dimos diferente forma. Pues va a ser el mismo volumen. Es que no comprendo si volumen es… es, es que creo que estamos confundiendo volumen con masa. ¿O es lo mismo? El mismo volumen creo que no. Pero, la masa si es la misma. Por ejemplo, en ese "rinfle" había la misma masa que esta bola. El mismo volumen no, pero la misma masa sí.

P: No, no es lo mismo porque no es la misma forma, pero si es la misma masa.

C: Es que yo los confundía, pensaba que era como lo mismo. O sea, eran como parecidos y yo decía que eran lo mismo, pero no. Ya me quedó claro.

F: ¿Mis palabras? Ándale. Es que yo no sabía muy bien como era el volumen y la masa.

A: La masa es el peso.

N: No, porque el peso tiene que ver con la gravedad, ¿no? Vimos que volumen y masa no tiene nada que ver con lo mismo. Porque la masa es el peso, pero con la gravedad, no, eso era la fuerza. La fuerza es lo que normalmente sentimos. Peso, bueno la masa es aparte de todo eso.

Como se puede observar, lograron la diferenciación de la masa y el volumen después de un desequilibrio ocasionado por la confusión al creer que masa era igual a volumen, pero después ellos mismos buscaron la explicación a esa duda que surgió, logrando diferenciar los conceptos afirmando que al cambiar de forma las barras de plastilina se conserva la masa, pero el volumen cambia. Además, un alumno al creer que masa era igual a peso, otro estudiante lo corrige diciéndole que el peso se relaciona con la gravedad. Es decir, a partir de un estudiante con un desarrollo cognitivo mayor logra ayudar a otro a diferenciar los conceptos, para que logre una acomodación adecuada (Piaget, 1986).

Al iniciar a estudiar los cuerpos geométricos regulares, se les presentó 13 cuerpos que constaban de 6 pirámides, 6 prismas y la esfera se los alumnos se encontraban en un nivel de visualización (Lastra Torre, 2005), ya que sólo se fijan en la forma de la base del prisma o pirámide, cuando mencionan que es un hexágono o un círculo, únicamente, además en su lenguaje se nota el desconocimiento de su nombre al llamarlos "prisma piramidal" o dudar si se trata del prisma hexagonal a pesar de haber aceptado ya conocer los cuerpos geométricos que se les presentaron.

Posterior a la presentación de los cuerpos geométricos se les pidió que elaboraran una tabla entre todos donde mostraran las características que ellos consideraban más importantes en los cuerpos geométricos (Figura III), sucediendo dos fenómenos, las ideas que tenían por cara, vértice y arista les causo conflicto con los cuerpos redondos (esfera, cilindro y cono) por lo que tuvieron que proponer una nueva definición para ellos (Tabla III).

Figura III: *Tabla de las principales características de los cuerpos geométricos.*

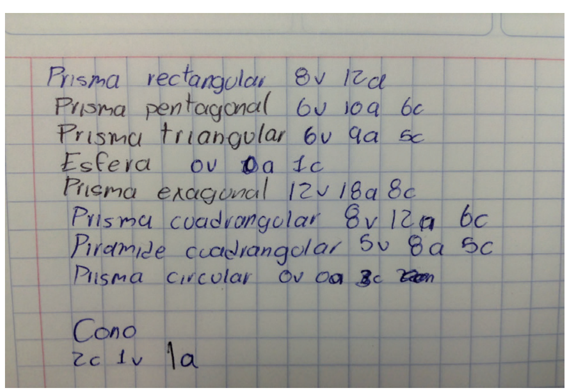
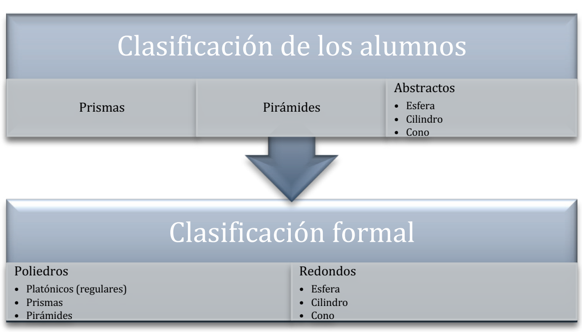

Prisma rectangular 8v 12a
Prisma pentagonal 6v 10a 6c
Prisma triangular 6v 9a 5c
Esfera 0v 0a 1c
Prisma exagonal 12v 18a 8c
Prisma cuadrangular 8v 12a 6c
Piramide cuadrangolar 5v 8a 5c
Prisma circular 0v 0a 3c
Cono
2c 1v 1a

***Tabla III:** Definiciones propuestas por los alumnos.*

Concepto	Definición del estudiantado	Definición formal
Vértice	Las esquinas donde "chocan" dos aristas. Donde chocan, ¿dónde se juntan dos aristas? El vértice es, es que no me convence eso de los piquitos. Si no, es que tiene que ser más allá. Y un vértice ahorita como lo estamos viendo no es que sea la intersección de las aristas. El pico, o donde se forma un ángulo.	"Las intersecciones de las aristas" (Wentworth, 1986, p. 317).
Arista	Vendría siendo como la conjunción del contorno de una cara con otra cara.	"Los planos que limitan un poliedro se llaman caras; sus intersecciones, aristas" (Wentworth, 1986, p. 317).
Volumen	El espacio que ocupa un cuerpo.	"llámese volumen de un sólido el número de unidades de volumen que contiene" (Wentworth y Smith, 1986, p. 322).

El hecho que el alumnado proponga sus propias definiciones y coincidan parcial o totalmente con la definición formal habla de un nivel de compresión de los elementos y conceptos bastante profundo, estableciendo con claridad a los alumnos en un nivel de deducción informal y preparados para empezar a transitar al siguiente nivel que es de deducción formal donde efectúan las demostraciones formales, usos de axiomas, postulados, etcétera (Lastra Torre, 2016). Además, se les solicitó que clasificaran los cuerpos geométricos en grupos de acuerdo con las características que enlistaron, las cuales se mostraron en la Figura III. Sus categorizaciones se muestran a continuación en la Figura IV.

***Figura IV:** Comparación entre la clasificación propuesta por los alumnos y la comparación formal*



Además de clasificar los cuerpos geométricos se les propuso a los estudiantes tratar de deducir la manera en la que podían calcular el volumen de los sólidos de acuerdo con la clasificación que propusieron, es decir, como se podría calcular el volumen de los prismas (incluyendo el cilindro), las pirámides (incluyendo el cono) y los cuerpos redondos, considerando únicamente la esfera. Los alumnos lograron deducir la fórmula de los prismas y las pirámides en lugar de al final obtener un tercio del volumen del prisma que contiene la pirámide con misma base y altura mencionaban que era un medio porque en las figuras geométricas un triángulo es la mitad de un rectángulo y sólo trasladaron está idea a los cuerpos geométricos. Con la esfera no lograron una deducción acertada o aproximada, es más, hasta tenían problemas para calcular el radio de esta. Pero en general se posicionan en un nivel dos de análisis informal debido a la argumentación que los alumnos dieron en su mayoría.

Conclusiones

Los alcances obtenidos efectivamente se midieron utilizando ingeniería didáctica, los cuales muestran que las secuencias favorecen el aprendizaje del concepto de volumen, así como elementos de la clasificación de los cuerpos geométricos regulares, el cálculo de volúmenes de prismas y pirámides, pero no la resolución de problemas que impliquen esferas. Sólo aquellos problemas y cuerpos geométricos que se explicaron con mayor detenimiento y se resolvieron varios problemas al respecto son conocimientos que se añadieron a la estructura cognitiva de los estudiantes de una manera más duradera coincidiendo con lo que menciona Piaget (1982).

La principal pregunta de investigación era “¿Cómo se puede mejorar el aprendizaje del volumen y densidad, a nivel preparatoria, en estudiantes ciegos/con baja visión?” Con lo cual surge la respuesta de que se puede mejorar utilizando materiales que faciliten a los estudiantes su comprensión, diseñados de tal manera que realmente favorezcan el aprendizaje y no se pierda tiempo y esfuerzo por parte de los alumnos en tratar de decodificar el lenguaje usado. Así como hacer una relación entre la explicación que el docente daba con ejemplos que propusieran los alumnos y que ellos creyeran que podrían aplicar. También es necesario poner mucha atención en la dinámica del grupo, es decir, si son un grupo más individualista, colaborativo o si existen ciertos alumnos que tienen mayor afinidad entre ellos. Propiciar preguntas que expongan los errores o confusiones que el alumnado tenga y que pueda responder, no de manera constante para poner a prueba su estructura cognitiva, sino para que aquellas ideas o creencias que tenían con errores o deficiencias se corrijan logrando el equilibrio (Piaget, 1982), *i.e.*, se tiene que conocer al grupo para poder potencializar sus cualidades y tratar de fortalecer sus debilidades. Por lo tanto, la hipótesis que surgía de aquella pregunta de investigación que era que se podía lograr a través de experiencias previas de los alumnos, y dotando de nuevos significados a cosas que ellos ya conocen o que pueden manipular de manera háptica con cierta facilidad, aprovechando su gran capacidad de memoria, resulta una suposición cierta.

En cuanto a las demás preguntas de investigación se responden con las Tablas III y IV presentadas anteriormente. En cuanto al O_g se cumplió al diseñar una secuencia didáctica basada en las fases propuestas por los Van Hiele con una evaluación a priori y una a posteriori a su aplicación, con un grupo focal y un examen y que constaba de ocho sesiones en la cual se elaboró material como regletas de 14 cm para que el estudiantado pudiera medir las longitudes de los cuerpos geométricos que también se diseñaron para la secuencia, dichos poliedros fueron hechos con cartulina y se resaltaron sus elementos usando diferentes texturas como velcro, limpiapipas, y diferentes telas, entre otras cosas (Figura V).

Figura V: *Materiales utilizados en la implementación de la secuencia didáctica.*

En cuanto a que nivel se encontraban y si lograron o no llegar al nivel dos propuesto por los Van Hiele, se muestran los resultados en la Tabla IV usando las descripciones de la Tabla I para establecer el nivel de los estudiantes. De lo cual se puede observar que tres de los seis estudiantes, es decir la mitad de ellos, logran alcanzar el nivel dos, considerando que los seis estudiantes comienzan en el nivel cero, lo anterior por supuesto no es un resultado generalizable ya que la muestra de estudiantes es pequeña, sin embargo nos da un buen resultado cualitativo, lo que apoya a la premisa que se tenía al comienzo de la investigación en la que se pretende que el uso del grupo de secuencias didácticas aplicadas a los estudiantes tenga un impacto positivo al incrementar su nivel en la escala Van Hiele.

Tabla IV: *Relación de alumnos con diagnóstico y niveles a priori y a posteriori*

Alumno	Grado		Diagnóstico	Nivel A priori	Nivel A posteriori
A	Primera aplicación (preparatoria)	2° (en línea)	Débil visual	0	0
N		2° (en línea)	Débil visual	0	2
Y		3° (en línea)	Ciego	0	2
C		1° (abierta)	Ciego	0	1
F		1° (abierta)	Ciego	0	2
P		2° (abierta)	Débil visual	0	1

Finalmente, sobre las preguntas ¿qué ocurre con los alumnos con discapacidad visual al trabajar con un modelo basado en la teoría Van Hiele? La respuesta es que el ir de "menos a más" como propone en la teoría mencionada en la profundización del conocimiento, le ayuda a los alumnos a la comprensión de los temas, e incentiva la autoconfianza al ir realizando tareas por ellos mismos. Y sobre ¿qué es necesario para que los estudiantes adhieran nuevos conceptos a su estructura cognitiva? esta se relaciona con la manera en la que ellos construyen el conocimiento que es a través del tacto activo, así como el acompañamiento durante los desequilibrios cognitivos que se puedan presentar.

Con los resultados y conclusiones aquí presentadas se da pie a modificaciones a la secuencia didáctica y a los instrumentos de recolección de datos para una segunda parte de la investigación con una nueva aplicación, en la cual aún se sigue trabajando para mejorar los alcances obtenidos hasta ahora.

Referencias

Andrade, P. (2010). *Alumnos con deficiencia visual. Necesidades y respuesta educativa*. España: Escuelas Católicas.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, y Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación matemática*, págs. 61-96. Bogotá: Iberoaméricana.

Bendersky, B. (2004). *La Teoría Genética de Piaget*. Buenos Aires: Longseller.

Buitrago Reyes, L.(2013), Conservación de Masa, Peso y Volumen en Niños de Tercer Grado en Tegucigalpa. (Tesis que para obtener el grado de Maestría en Investigación Educativa) Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Dawkins, K. D. *et al*, (Septiembre-Octubre de 2008). Teaching Density to Middle School Students: Preservice Science Teachers' Content Knowledge and Ped. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, *82*(1), 21-26. Doi: 10.3200/TCHS.82.1.21-26

De la Torre Gomez, A. (2003). El método Socrático y el modelo Van Hiele. *Lecturas matemáticas, 24*(2), 99-121.

Escamilla Gil, M. G. (2016). Opiniones de expertos en orientación educativa a través del grupo focal como método para descubrir una estructura de sentido compartida. *Revista Mexicana De Orientación Educativa, 13*(31), 2-11

Espinoza, R. C. (septiembre de 2015). Objetos de Aprendizaje 3D como una forma de comunicar significados geométricos a través del sentido virtual del tacto en personas ciegas y débiles visuales. *Revista de Sistemas Computacionales y TIC's, 1*(1), 16-28.

Fernández del Campo, J. (1986). *La enseñanza de la matemática a ciegos*. España: ONCE. Organización Nacional de Ciegos Españoles.

Flores, C. (2014). *Producción de materiales didácticos para estudiantes con discapacidad visual*. España: Ministerio de la Educación.

Garrido, J. (2009). Diseño de Investigación Cualitativa en Educación. Apunte de consulta para asignatura Investigación en Práctica Educativa. Obtenido en agosto, 2017: http://ocw.pucv.cl/cursos-1/investigacion-de-la-practica-pedagogica/recursos-complementarios

Ghazi, S. y Ullah, K. (2016). Concrete operational stage of Piaget's cognitive development theory: An implication in learning mathematics. *Gomal University Journal of Research, 32*(1), 9-20.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Lastra Torre, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas* (Tesis para obtener el grado de Magíster). Santiago: Universidad de Chile.

Martínez, L. y Ordaz, M. (2015). Las habilidades de visualización en geometría: el caso de una niña con discapacidad visual. En López Mojica, *Educación especial y matemática educativa*, págs. 97-124. San Luis Potosí: UASLP.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1982). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Rosa, A. y Ochaita, E. (1993). *Compilación de psicología de la ceguera*. Madrid: Alianza Psicología.

Sautu, R.; Boniolo, P.; Dalle, P. y Elbert, R. (2005). Métodos y técnicas de investigación en diseños metodológicos cualitativos y cuantitativos. En *Manual de metodología. Construcción del marco teórico, formulación de objetivos y elección de la metodología*, pp. 47-66. Bs As: CLACSO, Colección Campus Virtual. En https://bit.ly/2NrFrib

Wentworth, J. y Smith, D. (1986). *Geometría*
Plana y del Espacio. México: Porrúa.

USOS Y RESIGNIFICADOS DE LA PROPORCIONALIDAD EN EL CONTEXTO DE LAS HUERTAS ESCOLARES

USE AND RESIGNIFICATION OF PROPORTIONALITY IN SCHOOL VEGETABLE GARDENS

USOS E RESSIGNIFICADOS DA PROPORCIONALIDADE NO CONTEXTO DAS JARDINS ESCOLAS

Paola, Balda Álvarez

Afiliación: Secretaría de Educación de Soacha

Correo: pbalda20@hotmail.com

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7824-9496

Resumen

Se presentan los resultados parciales de una investigación doctoral que tuvo como propósito formular una epistemología de usos de lo proporcional. La investigación tuvo como detonante el reconocer la poca relación que muchos de los estudiantes establecen entre las matemáticas en uso y aquellas que son aprendidas en la escuela. Partió de la premisa de considerar la existencia de un pensamiento proporcional que se difunde socialmente y se pone en práctica en el desarrollo de las tareas de la huerta escolar. El análisis de lo observado se llevó a cabo a través de los constructos de la Teoría Socioepistemológica. La reflexión en torno a los aspectos sociales, cognitivos, epistemológicos y didácticos como dimensiones constitutivas de la construcción del saber se llevó a cabo a través de la construcción de unas mallas de análisis las cuales fueron herramientas claves de la problematización y consecución de los objetivos.

Palabras clave: huertas escolares, socioepistemología, proporcionalidad, usos.

Abstract

This paper presents the provisional outcomes of a doctoral research which was aimed at formulating an epistemology of uses of the proportional. The research arose from the recognition of the poor relationship that many students establish between mathematics in everyday use and mathematics learned at school. It started from the premise of considering the existence of a proportional thought which is socially spread and it is put into practice when developing school vegetable garden tasks. The analysis was carried out through the Socio-epistemological Theory constructs. The reflection with respect to social, cognitive, epistemological and didactic aspects as dimensions that make up knowledge construction was carried through the construction of analysis meshes which constituted essential tools to the problematization and attainment of the objectives.

Keywords: school vegetable gardens, socio-epistemology, proportionality, uses.

Resumo

São apresentados os resultados parciais de uma pesquisa de doutorado que objetivou formular uma epistemologia de usos da proporcional. A investigação teve como gatilho o reconhecimento da pouca relação que muitos dos estudantes estabelecem entre a Matemática em uso e aquela que é aprendida na escola. Partiu-se da premissa de considerar a existência de um pensamento proporcional que se difunde socialmente e se põe em prática no desenvolvimento das tarefas da horta escolar. A análise do que foi observado se realizou por meio das construções da Teoria Socioepistemológica. A reflexão sobre os aspectos sociais, cognitivos, epistemológicos e didáticos como dimensões constitutivas da construção do saber foi realizada a partir da construção de algumas malhas de análise, que foram ferramentas-chave da problematização e alcance dos objetivos.

Palavras-chave: hortas escolares, Socioepistemología, proporcionalidade, usos.

Introducción

Este documento presenta los resultados parciales de la investigación doctoral en el marco del Doctorado en Educación de la Universidad Santo Tomás de Colombia. La investigación tuvo como detonante el reconocer la poca relación que muchos de los estudiantes establecen entre las matemáticas en uso y aquellas que son aprendidas en la escuela. Partió de la premisa de considerar la existencia de un pensamiento proporcional que se difunde socialmente y se pone en práctica en el desarrollo de las tareas que los niños llevan a cabo en el escenario de la huerta escolar. El problema principal de investigación consistió en identificar cuáles eran los usos de lo proporcional en el contexto de la huerta escolar, con el objetivo de formular una epistemología de prácticas en torno a este saber. Las preguntas que guiaron la investigación fueron:

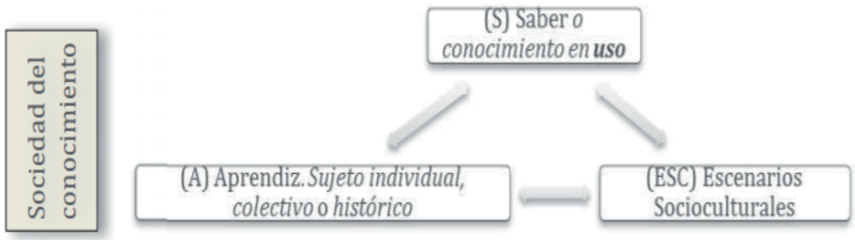
- *¿Cuáles son los usos y resignificados de lo proporcional en la realización de las tareas de la huerta escolar?*
- *¿De qué forma los usos y resignificados aportan a la construcción de una epistemología de usos en torno a este saber?*

Los interrogantes fueron abordados a través de los constructos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa propuesta por Ricardo Cantoral. Para ello, se realizó un análisis a la información obtenida producto de un acompañamiento realizado durante cinco años a huertas escolares ubicadas en diversas zonas geográficas de Colombia. El análisis de la información hizo referencia a "las características que se deseaban investigar y representó en particular, la relación simbiótica entre las actividades de la huerta escolar, el uso de la proporcionalidad, y la transmisión del saber enmarcado en los paradigmas, costumbres y tradiciones del contexto que permean las acciones de los estudiantes" (Balda, 2018, p. 123) y se llevó a cabo una vez organizada la información en un conjunto de mallas organizadoras, las cuales permitieron identificar los usos de lo proporcional en el escenario en cuestión.

Marco teórico

El marco de referencia es considerado desde nuestra perspectiva la columna vertebral de la investigación. Este marco partió de las premisas y constructos del enfoque Socioepistemológico de la Matemática Educativa, en el cual se reconoce, entre otras cosas, que los objetos matemáticos no sólo viven en el aula, trascienden más allá del uso escolar, es decir, "los estudiantes llevan su conocimiento al contexto sociocultural mediante el uso, así mismo los conocimientos en uso pasan a la escuela y regresan a la vida en un tránsito sin fin" (Sierra, 2008, p. 6). Esta relación simbiótica entre el saber, entendido este como conocimiento en uso; los escenarios socioculturales en donde se resignifica el saber y el aprendiz, un sujeto que da sentido al saber a través del significado que le otorga, pero que además en un sujeto que tienen historia y otorga intención al uso del saber, se materializa en el triángulo didáctico de la Teoría Socioepistemológica propuesto por Cantoral (2013).

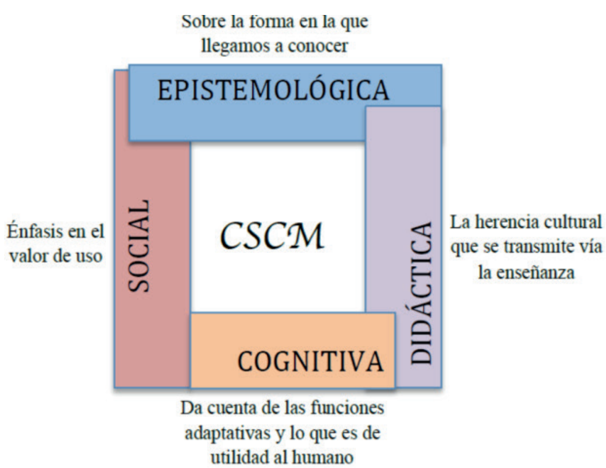
Imagen I: Triángulo didáctico socioepistemológico



Fuente: *Cantoral (2013)*

En este escenario más allá de aprender se reconoce el "significar", pues el hombre en su cotidianidad da significado al hacer a través de las relaciones sociales, culturales y económicas en el seno de una comunidad. Bajo esta perspectiva las explicaciones en torno a lo que hacemos y qué hacemos cuando construimos conocimiento no podría limitarse al estudio de lo cognitivo, epistemológico y didáctico, debería ampliar la mirada y permitir que lo social forme parte de estos elementos. Así, en palabras de Cantoral (2013, p. 61) "la Teoría Socioepistemológica busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos, es decir, intervenir el sistema didáctico para transformarlo" y se incorpora al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza. Por tanto, la Socioepistemología asume como objeto de estudio la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM) y su difusión institucional, una problematización del saber en diferentes escenarios y con diversas miradas en la búsqueda por identificar cómo ese saber es usado y cuáles son las características de uso que permiten la fundamentación de nuevas epistemologías en torno a un saber.

Imagen II: Triángulo didáctico socioepistemológico



Fuente*: Zaldivar, 2014.*

La investigación construida bajo los fundamentos de la Teoría Socioepistemológica realizó una problematización del saber en el contexto de la huerta escolar, partiendo de la premisa que en este escenario cohabitan tres tipos de saberes: el saber popular, reconocido como aquel saber producto de una herencia cultural; el saber técnico, producto del éxito de una experiencia y el saber culto, aquel que representa lo que se transmite en el aula. Este reconocimiento permite considerar que en cualquiera de los casos, estos saberes son institucionalizados y constituyen la sabiduría humana. En las tareas de la huerta escolar estos saberes se ven representados en el quehacer de los niños, pues sus formas de proceder frente a una situación están siempre normadas, ya sea por el conocimiento heredado, por sus padres, abuelos o comunidad; por resultados exitosos de experiencias previas, o por los aprendizajes dirigidos por sus docentes.

Lo anterior conduce a pensar que no debe ser el objeto matemático *per se* el centro del proceso de significación, sino aquellas prácticas que fundamentan su constitución. De ahí que se comparta la premisa socioepistemológica de la descentración del objeto, pues el énfasis no está en él. De hecho, el foco de interés son formas de pensamiento socialmente instauradas y desarrolladas, las cuales están presentes cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no solo la producción matemática del hombre, a la vez que otorgan a la actividad humana la función de construir los objetos y conceptos matemáticos en escenarios y contextos particulares (Montiel y Buendía, 2013). Así como lo afirma Sierra (2008):

> Para la Socioepistemología los objetos matemáticos no sólo viven en el aula, trascienden más allá del uso escolar, es decir, los estudiantes llevan su conocimiento al contexto sociocultural mediante el uso, así mismo los conocimientos en uso pasan a la escuela y regresan a la vida en un tránsito sin fin (p. 6).

El objeto matemático en el cual se centró la investigación fue la proporcionalidad, la cual se estudió a la luz de los modelos de razonamiento proporcional propuestos por Reyes-Gasperini (2011), los cuales fungieron como lente para observar e interpretar la información obtenida en el acompañamiento, con el objetivo de interpretar el quehacer de los estudiantes en el desarrollo de las tareas de la huerta escolar en torno a este saber. Esto, toda vez que un análisis previo del quehacer en la huerta permitió identificar que en este escenario sin importar la zona geográfica donde se encuentre se llevan a cabo diez tareas a saber: preparar el terreno, sembrar, abonar, hacer surcos, regar, trasplantar, recoger, podar, tutorar y deshierbar. Además, la caracterización de las tareas presentadas permitió inferir que durante su desarrollo se llevan a cabo unos haceres que se repiten y que surgen de la descripción de los momentos de cada tarea: la comparación, la medición, la clasificación, la selección, la estimación, el conteo, la anticipación y la aproximación. Así, nuestra principal premisa fue considerar a estos haceres como la base de significación de los usos de lo proporcional, pues tal y como lo mencionan autores como: Soto y Rouché (1995), Lizarzaburu y Soto (2001) y Yojcom (2013), existe pensamiento proporcional en el ejercicio de las tareas de agricultura.

Para llevar a cabo el análisis se organizó la información en un conjunto de mallas direccionadas bajo los constructos Socioepistemológicos, en donde las categorías de funcionamientos y formas propuestas por Cordero (2008) fueron base para la comprensión de los usos de lo proporcional en el contexto de la huerta escolar y permitieron dar respuesta a interrogantes como: ¿Cuál es la relación entre los usos y modelos de pensamiento relacionadas con lo proporcional? ¿Cómo el niño actúa sobre esta relación? ¿Para qué usan la proporcionalidad en determinada tarea de la huerta escolar?

Metodología

La investigación se llevó a cabo durante un periodo de cinco años, desde el año 2012 hasta el año 2017. Durante el periodo investigativo fueron visitadas 67 sedes educativas ubicadas en diferentes municipios de Colombia que trabajaban las huertas escolares en el marco de los Proyectos Pedagógicos Productivos de Agricultura Sostenible.

Imagen III: *La problematización y elementos de un análisis socioepistemológico*

Fuente: *Montiel y Buendía (2011).*

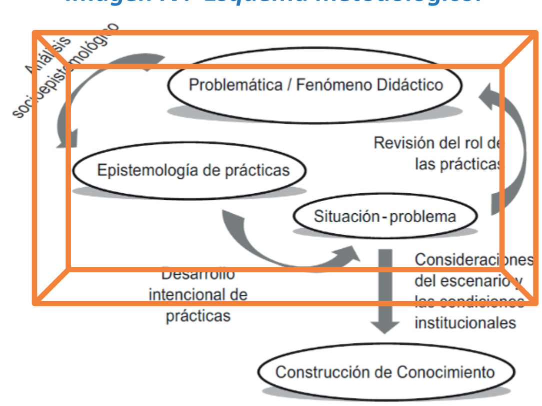
En el acompañamiento se buscó reconocer lo que tenían que decir sus actores, es decir, los niños, maestros y padres de familia. La investigación se centró especialmente en el hacer de los niños; niños entre cinco y doce años que trabajaban en las huertas escolares acompañadas y que cursaban grados desde transición hasta quinto de primaria. La selección de los niños no obedeció a una cantidad específica predeterminada, fueron aquellos que en el momento del acompañamiento a las huertas estaban llevando a cabo sus tareas. No se buscó la representación estadística, sino la representación de la diversidad de situaciones vivenciales, es decir el hacer en la huerta escolar hasta llegar a una saturación.

El acompañamiento se realizó de forma periódica no regular, lo que permitió a través de notas de campo, entrevistas, grabación de videos y fotografías, un análisis hermenéutico que partió de unas mallas organizadoras de información y concluyó en la constitución de una unidad de análisis. Todo lo anterior sustentado bajo los constructos del marco teórico y la propuesta metodológica propuesta por Montiel y Buendía (2011).

Se reconoció que dentro de las posibles fuentes de información: las de naturaleza epistemológica del saber, las de resignificación del saber, y las de trasmisión del saber, la investigación buscaba reconocer los significados del saber es el hacer en un escenario escolar permeado por lo cotidiano, un escenario dentro de la escuela y fuera del aula que trae la realidad del que aprende a la institución (imagen III).

Así el desarrollo de la investigación se esquematizó teniendo en cuenta los dos primeros momentos del esquema metodológico.

Imagen IV: Esquema metodológico.



Fuente: *Montiel y Buendía (2011).*

En el primer momento se hizo explicita la problematización el saber, se cuestionó acerca de cómo lo proporcional vive en el contexto de la huerta escolar. La acción relacionante entre el momento uno y el momento dos, el análisis socioepistemológico, buscó identificar cómo se logra la comprensión de saberes a través de sus significados contextualizados y de su transmisión (Balda, 2018). El momento dos, buscó a través del resultado del análisis proponer una epistemología de prácticas o usos de lo proporcional, la cual condujo a identificar entre otras cosas a lo periódico como un saber que se relaciona con lo proporcional y que aporta a la epistemología propuesta.

◆ El primer momento de la problematización del saber. Las mallas organizadoras de información

Tal y como se mencionó el acompañamiento llevado a cabo condujo en primera instancia a un proceso de organización de información, la cual se pudo llevar a cabo ya que una vez recogida una cantidad considerable de información se concluyó "el quehacer en las huertas escolares, sin importar su ubicación geográfica es prácticamente el mismo" (Balda, p. 116, 2018). Este hacer se caracteriza por la puesta en marcha de una serie de tareas, las cuales a su vez traen consigo la realización de manifestaciones matemáticas recurrentes. Así las mallas organizadoras de información se crearon teniendo en cuenta siete componentes que surgieron de la significación otorgada al marco teórico.

Imagen V. *Estructura de la malla organizadora de información.*

TAREA: ATIERRAR						
MANIFESTACIONES MATEMÁTICAS RECURRENTES: Comparan la textura de la tierra de las plantas sembradas.			Seleccionan y clasifican aquellas que requieren o no el proceso.		ACTIVIDADES	
DESCRIPCIÓN: Los niños atierran el sembrio de papas						
TRANSCRIPCIÓN DEL VIDEO, NOTA DE CAMPO O DESCRIPCIÓN FOTOGRÁFICA	ACCIONES	USO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO * RAZÓN *UNIDAD DE MEDIDA		HERRAMIENTAS (FÍSICAS ROPOMÉTRICAS FÍSICAS EXTERNAS)	OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	
		FUNCIONAMIENTOS	FORMAS			

Fuente: *Balda (2018)*

a. Tarea. Se diligenciaron diez mallas organizadoras, una por cada una de las tareas que los estudiantes realizan en las huertas escolares.
b. Manifestaciones matemáticas recurrentes. La descripción realizada de cómo se lleva a cabo paso a paso cada tarea en la huerta escolar.
c. Transcripción de video, nota de campo o descripción fotográfica que sustenta cada tarea.
d. Acciones. Las acciones se constituyeron en una descripción detallada del hacer en esa tarea específica.
e. Uso del conocimiento matemático. Buscó identificar en el quehacer aquellos indicios de uso de lo proporcional a la luz de para qué usan la proporcionalidad en determinada tarea de la huerta (funcionamientos) y la relación entre las diversas nociones y modelos de pensamiento relacionadas con lo proporcional y cómo el niño actúa sobre ella.
f. Herramientas. Se identificaron herramientas de dos tipos que representan las diversas formas de razonar que los estudiantes manifestaban al momento de llevar a cabo una tarea.

g. Razonamientos proporcionales de tipo. En esta sección y de forma más específica se modelaron los razonamientos proporcionales identificados en cada quehacer, basado en la propuesta de Reyes-Gasperini (2016).

Se presenta a continuación un ejemplo de una de las mallas organizadoras de información.

Imagen VI. *Estructura de la malla organizadora de información en la tarea de sembrar.*

<table>
<tr><th colspan="7">TAREA: SEMBRAR</th></tr>
<tr><td colspan="7">MANIFESTACIONES MATEMÁTICAS RECURRENTES:
• La comparación del terreno a sembrar con otro ya sembrado
• La anticipación del tamaño de la producción
• La clasificación del terreno
• La selección del terreno en el cual realizan la siembra
• La medición del terreno
• La medición de la profundidad del hoyo donde se sembrará la semilla
• El conteo de las semillas
ACTIVIDADES</td></tr>
<tr><td colspan="7">DESCRIPCIÓN: Los niños explican cómo hacer perforaciones para sembrar y cuántas semillas colocar</td></tr>
<tr><th rowspan="2">TRANSCRIPCIÓN DEL VIDEO, NOTA DE CAMPO O DESCRIPCIÓN FOTOGRÁFICA</th><th rowspan="2">EVIDENCIA DE ACCIÓN</th><th colspan="2">USO DEL CONOCIMIENTO PROPORCIONAL EN LA HUERTA-ESCOLAR
* RAZÓN</th><th rowspan="2">HERRAMIENTAS (FÍSICAS ANTROPOMÉTRICAS FÍSICAS EXTERNAS)</th><th rowspan="2" colspan="2">RAZONAMIENTOS PROPORCIONALES DE TIPO</th></tr>
<tr><th>FUNCIONAMIENTOS</th><th>FORMAS</th></tr>
<tr><td>V4-N1-002: Vea, primero se hace el surco, después coge usted un palo y lo mete así como los cubios, profundo. Y después coge como 2 o 4 semillitas de la arveja y va tapando</td><td rowspan="4">El niño introduce un palo en la tierra, hace un conteo de las semillas mirando con detenimiento la textura de la tierra para tomar decisiones respecto a la cantidad de semillas que debe introducir en el hueco que dejó el palo. Utiliza sus dedos para representar el cuatro, tres y dos e introduce y tapa la semilla</td><td rowspan="4">Usa el palo como patrón para indicar la profundidad del hueco donde sembrará

Relación la cantidad de semillas a colocar en la perforación con la textura de la tierra donde colocará las semillas.</td><td rowspan="4">Hay una relación texturade la tierra/cantidad de semillas

Patrones de medida en la ejecución de la tarea

¿Si la cantidad de semillas depende de la textura de la tierra, de qué depende profundidad del orifio donde se coloca la semilla?
¿Qué es profundo?</td><td rowspan="4">Externa: Una vara o palo

Patrón no antropométrica

Razonamiento</td><td colspan="2">Se establecen relaciones entre dos tipos de variables de distinta naturaleza, cualitativas y cuantitativas.

La cantidad de semillas que uso para la siembra depende del tamaño del lote

Relación cuantitativa: cuantitativa (diferente naturaleza)</td></tr>
<tr><td>V4-E-005 ¿depende de qué?</td><td>semillas
2 o 4</td><td>Perforación
1</td></tr>
<tr><td>V4-N2-006: Del lote</td><td colspan="2">Relación cuantitativa: cualitativa (diferente naturaleza)</td></tr>
<tr><td>V4-E-007: Qué significa lote, es que yo no se?</td><td>semillas
12</td><td>Extensión del terreno
grande

2 o 4 semillas por

Razonamiento cualitativo</td></tr>
</table>

Fuente: *Balda (2018).*

Análisis de usos a partir de los componentes de la unidad de análisis

El análisis de lo ocurrido en cada tarea y en particular de aquellas manifestaciones recurrentes que validan la hipótesis que considera la existencia de un pensamiento proporcional en el hacer de la huerta escolar condujo a la constitución de la unidad de análisis, la cual tuvo en cuenta la actividad humana y en las circunstancias que le rodean Buendía y Montiel (2011). Sus tres polos llevaron a una estrecha correspondencia con los componentes del Triángulo Didáctico Socioepistemológico expuestos en el Marco Teórico. En el polo del saber se ubicaron el saber proporcional, entendido éste como la proporcionalidad en uso. En el polo del escenario sociocultural se consideró la huerta escolar. Y finalmente, en el polo del aprendiz se ubicaron los niños, considerados como sujetos históricos y culturalmente situados, tal y como se observa en la imagen VI (Balda, 2018).

***Imagen VII:** Unidad de análisis*

***Fuente:** Balda (2018)*

Un ejemplo del análisis a la luz de los tres componentes de la UAS

A continuación, se presenta como ejemplo la forma cómo se llevó a cabo el análisis de lo observado en las tareas de la huerta escolar a la luz de los tres componentes de la UAS.

Tabla I: *Análisis de lo observado en la tarea de riego a la luz de los tres componentes de la Unidad de Análisis Socioepistemológica.*

<table>
<tr><th>Las acciones observables</th><th>La intencionalidad explícita</th><th>El saber proporcional</th></tr>
<tr>
<td>

La comparación del terreno a sembrar con otro ya sembrado o el mismo
La anticipación del tamaño de la producción
La clasificación del terreno implica una selección.
La selección del terreno.
La medición del terreno.
El conteo de semillas.

</td>
<td>

Su experiencia norma su quehacer.
El empleo de este tipo de patrones obedece a una racionalidad que otorga el contexto.
La anticipación trae consigo un razonamiento que reconoce que la producción depende de varios factores, unos que controlables y otros no.
El hacer y el éxito de éste otorgó validez a un proceder, permitió que se resignificara un conocimiento.
Función identitaria.

</td>
<td>

Tamaño del terreno referencia
Uso de unidades antropométricas: paso, palmo, dedo
Se ponen en juego relaciones de dependencia entre magnitudes de diferente naturaleza, entre profundidad de una perforación y éxito de germinación. Es decir, relaciones entre magnitudes cuantitativas y magnitudes cualitativas.
Razonamientos de tipo aditivo y multiplicativo .

<table>
<tr><th></th><th>Cantidad de hoyos</th><th>Cantidad de semillas</th><th></th></tr>
<tr><td>+1</td><td>1</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>
“En un hueco pongo tres semillas. En dos huecos pongo seis semillas”
<table>
<tr><th></th><th>Cantidad de papas a sembrar</th><th>Cantidad de papas que se obtienen</th><th></th></tr>
<tr><td>x2</td><td>2</td><td>más o menos 4</td><td>x2</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>El doble</td><td></td></tr>
</table>
“Si siembro dos papas se producen más o menos cuatro papas. Si siembro cuatro, pues el doble”
</td>
</tr>
</table>

Este tipo de análisis se llevó a cabo con cada una de las tareas de la huerta escolar, el cual permitió identificar la relación que se establece entre el uso dado a la proporcionalidad en este contexto y los factores como los paradigmas, costumbres y tradiciones que inciden en su desarrollo, los cuales son mediados por intencionalidades explícitas. Así las intencionalidades con las cuales lo proporcional vive y se emplea en este contexto se reducen a tres a saber:

> 1) Para establecer comparaciones entre variables de igual o distinta naturaleza, lo cual está en la base subyacente del pensamiento proporcional y conlleva al establecimiento de relaciones de dependencia. 2) Para el establecimiento de unidades de medida y uso de patrones de medida. Los patrones son empleados como herramientas para determinar la cantidad de veces que determinado objeto cabe exactamente en otro. Una comparación que inicialmente es determinada por números enteros y la cual ante la imposibilidad de relacionar siempre usando ese sistema numérico, otorga a la comparación como tal, el estatus de unidad para medir y es aceptada e institucionalizada. 3) Para expresar generalizaciones, las cuales se manifiestan de forma evolutiva iniciando con expresiones retóricas que dan paso a expresiones sincopadas en donde generalizaciones como: el doble, el triple o la mitad, aparecen en el léxico de los estudiantes. A estas tres vertientes se les denominó uso 1 y uso 2 y uso 3 de la proporcionalidad en el contexto de la huerta escolar. En los tres casos se infirió que la finalidad de estos usos es la de obtener una medida justa que determine el éxito de la cosecha (Balda, 2018, p. 121).

La identificación de los usos y su estudio a profundidad fueron considerados desde la investigación como detonantes para la construcción de la epistemología de usos de lo proporcional, lo cual era el interés primario de la investigación.

Resultados

Hasta aquí se presentan los resultados parciales de una investigación doctoral que tuvo como propósito formular una epistemología de usos de lo proporcional. El análisis de lo llevado a cabo por los niños en el desarrollo de las tareas en la huerta escolar condujo a dar respuesta a dos grandes interrogantes: *¿Cuáles son los usos y resignificados de lo proporcional en la realización de las tareas de la huerta escolar?* y *¿De qué forma los usos y resignificados aportan a la construcción de una epistemología de usos en torno a este saber?* Presentamos a continuación los resultados organizados bajo estas dos preguntas.

Usos de lo proporcional en el contexto de la huerta escolar

La organización de la información a través de las mallas organizadoras condujo a identificar que en el desarrollo de las tareas de la huerta escolar existen indicios de uso de lo proporcional a través de dos miradas que responden a los cuestionamientos: ¿Para qué usan la proporcionalidad en determinada tarea de la huerta escolar? (funcionamientos de lo proporcional), ¿Cuál es la relación entre los usos y modelos de pensamiento relacionadas con lo proporcional? y ¿Cómo el niño actúa sobre esta relación? (formas de lo proporcional). A partir de los interrogantes planteados y como respuesta a los mismos se infirió que en las tareas llevadas a cabo en la huerta escolar lo proporcional se emplea con ciertas intencionalidades, en particular tres:

1) Para establecer comparaciones entre variables de igual o distinta naturaleza, lo cual está en la base subyacente del pensamiento proporcional y conlleva al establecimiento de relaciones de dependencia.
2) Para el establecimiento de unidades de medida y uso de patrones de medida. Los patrones son empleados como herramientas para determinar la cantidad de veces que determinado objeto cabe exactamente en otro. Una comparación que inicialmente es determinada por números enteros y la cual ante la imposibilidad de relacionar siempre usando ese sistema numérico, otorga a la comparación como tal, el estatus de unidad para medir es aceptada e institucionalizada.
3) Para expresar generalizaciones, las cuales se manifiestan de forma evolutiva iniciando con expresiones retóricas que dan paso a expresiones sincopadas en donde generalizaciones como: el doble, el triple o la mitad, aparecen en el léxico de los estudiantes.

A estas tres vertientes se les denominó *uso 1 y uso 2 y uso 3 de la proporcionalidad en el contexto de la huerta escolar* (Balda, 2018, p. 171).

Una epistemología de lo proporcional fundamentada en sus usos

El análisis en torno a cómo lo proporcional vive en el contexto de la huerta escolar conllevó a analizar todo el sistema de construcción social del saber y su difusión institucional. La investigación permitió identificar cómo una práctica se vuelve saber y este a su vez se constituye en conocimiento. De ahí que el centro del debate haya sido el conocimiento en uso.

Los usos identificados tuvieron como base la manera matemática de pensar en el desarrollo de las tareas, la cual aportó a la construcción de la evolución conceptual del pensamiento proporcional que partió de considerar a la comparación, la medición y la generación como prácticas socialmente compartidas asociadas a la construcción social de lo proporcional. Desde nuestra perspectiva, cada una de las prácticas socialmente compartidas demanda a su vez de una serie de acciones y actividades específicas, las cuales dan sentido a su constitución.

La comparación, que además da sentido al primer uso de lo proporcional demanda en primera instancia de un reconocimiento de características a comparar a través de procesos de selección, conteo y clasificación. Una vez determinados los objetos a comparar se conduce a un segundo momento en el cual aparecen usos de herramientas tanto físicas como razonadas que permiten hacer estimaciones o anticipar hechos. Este momento de comparación conlleva al establecimiento de relaciones de dependencia entre las características que se comparan.

Por su parte, la medición tiene como punto de partida la comparación, las formas de razonar que se desarrollan a través de las comparaciones estimaciones y anticipaciones hacen que los estudiantes construyan e implementen convenciones de comunicación basadas en generalizaciones, las cuales favorecen la apropiación de modos proporcionales de pensar a la vez que se constituyen en mecanismos de preservación de este razonamiento.

Las formas de razonar que se desarrollan a través de las comparaciones estimaciones y anticipaciones hacen que los estudiantes construyan e implementen convenciones de comunicación basadas en generalizaciones, las cuales favorecen la apropiación de modos proporcionales de pensar a la vez que se constituyen en mecanismos de preservación de este razonamiento.

Se concluye entonces que en este escenario la construcción de lo proporcional obedece a una evolución de prácticas que parte de acciones intuitivas, la cuales corresponden al hacer y son: contar, comparar, seleccionar y clasificar. Estas acciones se organizan racionalmente de forma que se convierten en actividades, las cuales implican una mediación del sujeto con el objeto y representan un saber hacer razonado. Las actividades son: anticipar, comparar, contar y estimar. Cuando las actividades son compartidas y avaladas por la comunidad, cuando se institucionalizan y dotan de identidad el hacer, se consolidan como prácticas socialmente compartidas, prácticas que en este escenario son las comparaciones, las mediciones y las generalizaciones.

Referencias

Balda, P. (2018). *Una epistemología de usos de lo proporcional. Un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar.* (Tesis de doctorado no publicada). Bogotá -Colombia: Universidad Santo Tomás.

Balda, P., Buendía, G. y Vélez, C. (2018). Conocimientos y usos de lo proporcional en las huertas escolares. *Revista internacional de ciencias sociales y humanidades.* SOCIOTAM. 8(1), 9-23.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano,* (pp.285-309). México, México. Diaz Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya. (*Tesis de Maestría). México DF: Centro de investigación y Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

REVISTA ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - ALME

■ Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

■ Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

■ Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.

- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores y las autoras:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido aceptado para presentarse durante RELME 34. Es por ello que se solicita **enviar certificado de aprobación de la ponencia**.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo

de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.

4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.

- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: “por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes” (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba “...”. Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

    Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

    Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa