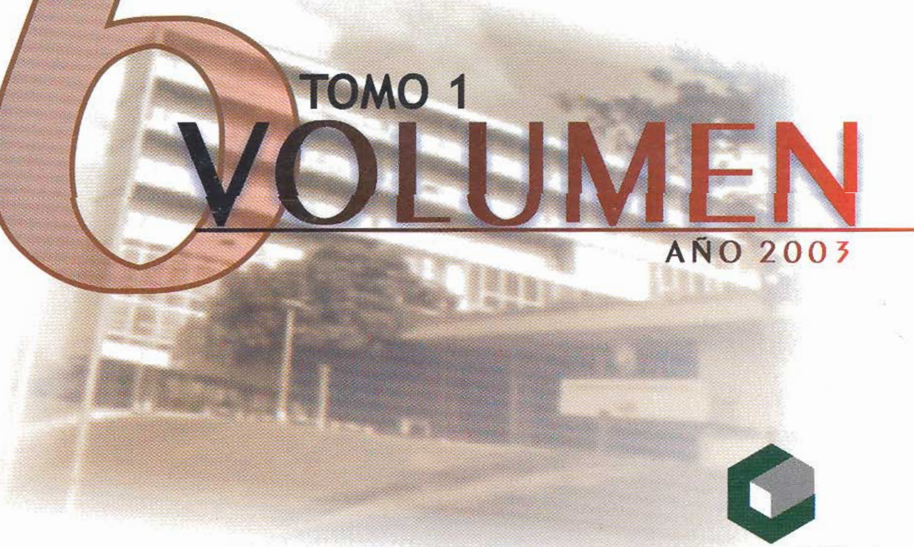
ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RELME
C U B A 2 0 0 2
Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa



16
TOMO 1
VOLUMEN
AÑO 2003

Instituto Superior Politécnico
José Antonio Echeverría
cujae

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 1

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
Volumen 16, año 2003

Editor:
Juan Raúl Delgado Rubí

Diseño de Portada:
Marcos Díaz Cedeño

I.S.B.N.: 956-8298-01-0 (Obra Completa)
Volumen 1 I.S.B.N.: 956-8298-02-9

Diagramación e Impresión:
Lorena Impresores Ltda.
Ñuble 1161, Santiago
Fonos: 4639343 - 5559292 - Fono/Fax: 4639342
E-mail: lorenaimpresores@hotmail.com

Impreso en Chile/ Printed in Chile

RELME

CUBA 2002

Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Comité Internacional de RELME 16

Presidente:	Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Vocales:	Cecilia Crespo Crespo	Argentina
	Guadalupe Tejada	Panamá
	Carlos Rondero	México

Comité Nacional Organizador de RELME 16

Presidente	Dr. Eugenio Carlos Rodríguez
Asuntos Académicos	Dr. Juan Raúl Delgado Rubí
Apoyo Logístico	Dra. María Lucía Brito Vallina
Relaciones públicas	Lic. María de los Angeles González Peñalver
Relaciones Internacionales y Divulgación	MSc. Mayra Durán Benejam
Finanzas e Inscripción	MSc. Esther Ansola Hazday
Coordinación Técnica	Dra. Bertha Fernández de Alaiza García-Madrigal
Coordinación Nacional	Dra. Virginia Alvarez Suárez
Miembros	Lic. Eva Escalona
	Lic. Lourdes Tarifa
	Dr. Luis Campistrous

PRESENTACIÓN:

Cuando en 1995, durante la 9na Reunión Centroamericana y del Caribe de Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa celebrada en el Centro de Convenciones del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas en Cojímar, La Habana, surgió la idea de acoger en el seno del movimiento a los docentes e investigadores en Matemática Educativa de toda Latinoamérica se daba un importantísimo paso en pos del desarrollo de esta disciplina y del mejoramiento de la enseñanza de la Matemática en nuestros países.

El siguiente año, durante la Décima Reunión en Puerto Rico se constituyó el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y fue ya en México, principal promotor de este movimiento donde se desarrolló la primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la cual conservó el ordinal correspondiente de sus predecesoras, o sea se llamó RELME 11 en aras de destacar que era un mismo movimiento, sólo que ahora enriquecido.

La Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 16, desarrollada del 15 al 19 de julio del 2002 en La Habana constituyó un momento importante de consolidación del movimiento. En ella, a diferencia de citas anteriores, pudo participar una nutrida delegación de profesores e investigadores cubanos, quienes trasmitieron sus experiencias en esta área, estando muchos de los trabajos avalados por Tesis de Maestrías y Doctorados de sus autores. Asimismo, concurrió una importante representación de colegas de Argentina, Bolivia, Canadá, Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, España, Estados Unidos, Guatemala, Honduras, México, Panamá, Perú, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Los artículos presentados en el presente Volumen 16 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, como en otras ediciones, siguieron las exigencias planteadas por el CLAME. En esta intensa y dedicada actividad colaboraron los siguientes evaluadores, para los cuales se hace patente el reconocimiento por la encomiable labor desarrollada:

Abel Fernández Infante	Cuba
Adriana González	Argentina
Alfredo del Castillo	Cuba
Ana Tadea Aragón	Argentina
Analida Ardila	Panamá
Beatriz Deiros	Cuba
Bertha Fernández de Alaiza	Cuba
Carlos Rondero	México
Carmen Luisa Méndez Fabret	Cuba
Cecilia Crespo	Argentina
Cecilia Gaita	Perú
Celia Rizo	Cuba
Christiane Ponteville	Argentina
Crisólogo Dolores	México
Delia Lerner	Argentina
Ed Dubinsky	EE.UU
Edison De Faria	Costa Rica
Eréndira Valdez	México
Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba
Fabián Valiño	Argentina
Francisco Cordero	México
Guadalupe Tejada de Castillo	Panamá
Gulnara Baldoquín de la Peña	Cuba
Gustavo Bermúdez	Uruguay
Herminia Hernández Fernández	Cuba
Juan Manuel Nole	Panamá
Juan Raúl Delgado Rubí	Cuba
Liliana Homilka	Argentina
Lourdes Hernández Rabell	Cuba
Luis Campistrous	Cuba
Luis R. Moreno Chandler	Panamá
Malva Analia Alberto de Toso	Argentina
Margarita Véliz	Argentina
María Cristina Pérez	Cuba
María del Carmen Pérez	Argentina
María Lucía Brito	Cuba
Marta Elena Valdemoros	México
Martha Fernández Casuso	Cuba
Mayra Durán Benejam	Cuba
Mayra Solana Sagarduy	Cuba
Nélida Pérez	Argentina
Olga Lidia Pérez González	Cuba
Oscar Sardella	Argentina
Otilio Mederos Niceto	Cuba
Patricia Camarena	México
Patricia Sadovsky	Argentina
Paúl Torres	Cuba
Rafael Espín Andrade	Cuba
Raúl de la Cruz Cordovés	Cuba
Regla Calderón Ariosa	Cuba
Ricardo Cantoral	México
Rosa María Farfán	México
Santa Daysi Sánchez	R. Dominicana
Sonia Hernández Rrodríguez	Cuba
Teresita Noriega	Cuba
Teresita Peralta	Costa Rica
Víctor Martínez Luaces	Uruguay
Yolanda Ofarrill	Cuba

Asimismo, el Comité Organizador Nacional quiere agradecer a los participantes y ponentes de RELME 16, ya que fueron ellos los que hicieron posible que se llevara a cabo con éxito este evento, así como a los representantes del CLAME y del Comité Internacional por la colaboración y orientación ofrecida. Merecen un agradecimiento especial Raúl de la Cruz Cordovés, Carmen Luisa Méndez Fabret, Martha Fernández Casuso y Sonia Hernández Rodríguez sin cuya colaboración y apoyo incondicional, tanto la realización del evento como la edición de las Actas no hubiera sido posible.
Queremos patentizar el agradecimiento a Marlén Marcos Vázquez, Abel Fernández, Lourdes Casañas, Ana Margarita Vicente, Beatriz Deiros, María del Carmen Rodríguez, Alfredo del Castillo, Leonor Fernández, Carlos Cepero y Valentina quienes sin ser miembros del Comité Nacional Organizador, trabajaron abnegadamente en pos de la realización del evento.

Un agradecimiento especial queremos patentizar a todos los estudiantes de Ingeniería Industrial e Informática que colaboraron en la preparación y realización del evento, en especial a Eduardo Lima Mitev y Susel Ruiz Durán quienes trabajaron incansablemente antes y durante el evento y a Marbelys Vega Álvarez por su infatigable labor durante el proceso de edición de las Actas, sin cuya ayuda hubiera sido imposible llevarla a feliz término.

Comité Organizador Nacional

Indice del Tomo 1

RESOLUCION DE PROBLEMAS

EPISTEMOLOGIA Y ESTUDIOS SOCIOCULTURALES

FORMACION DE PROFESORES

APRENDIZAJE COOPERATIVO

GRAFICA Y FUNCIONES

TECNOLOGIA AVANZADA

VARIOS

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 16

Tomo 1

Conferencias Plenarias

Matemática Educativa: un camino entre filiaciones y rupturas

Rosa María Farfán
Departamento de matemática educativa, Cinvestav – IPN. México
rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen

Si bien es cierto que las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas unas décadas de existencia. De entonces a la fecha se han formado varias generaciones de matemáticos educativos y, en ese proceso, la disciplina se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo que ha ganado para sí la legitimidad de una problemática de estudio. En este escrito intentaremos señalar, a partir de diferentes momentos, las diversas filiaciones y rupturas, que a nuestro juicio se han dado y se dan, especialmente con la escuela empirista en el ánimo de aportar elementos al debate sobre la pertinencia e identidad de nuestras investigaciones.

Presentación

La matemática educativa nace como disciplina científica teniendo como presupuestos explícitos: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de abordar razonablemente, sistemáticamente, científicamente y con especificidad los fenómenos de enseñanza de las matemáticas. Arriesgando una definición se podría decir que la matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende.

Asumimos como *problemática* de estudio para la *matemática educativa*, el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza. Dicha introducción del saber matemático al sistema didáctico, obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también a las relaciones entre estudiantes y profesor. Este proceso de incorporación de conocimientos y prácticas altamente especializados al sistema didáctico, plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados a fin de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas de los actores educativos.

En el devenir del desarrollo disciplinar, podemos establecer filiaciones y rupturas con el saber: matemático, psicológico, etnográfico y cultural que han dado como consecuencia diversas miradas, a saber: *una mirada sin alumnos, una mirada sin escuela, una mirada sin escenarios y una mirada sociocultural.* En lo que sigue abordaremos esta discusión, previamente estableceremos los pautas epistemológicas que seguimos.

En general para las ciencias humanas: la separación entre la opinión común y el discurso científico es mas impreciso que en otros casos (Bourdieu, 1973), puesto que la familiaridad con el universo educativo constituye el obstáculo epistemológico por excelencia para el matemático educativo porque produce continuamente concepciones o sistematizaciones ficticias, al mismo tiempo que sus condiciones de credibilidad. De modo que, como señala Bachelard: *el hecho se conquista contra la ilusión del saber inmediato... op cit*; asimismo debe recordarse reiteradamente en el curso de la investigación que: una investigación seria conduce a reunir lo que vulgarmente se separa o a distinguir lo que vulgarmente se confunde... op cit. Así una investigación científica inicia señalando explícitamente las rupturas que hubo de superar para plantear el estudio.

Por otro lado la noción de vigilancia teórica es consustancial a la investigación puesto que *lo que a menudo se observa no es pertinente ni significante, y lo que es pertinente y significante es frecuentemente difícil de observar en un laboratorio de física o en cualquier otra ciencia... op cit* y es justamente la teoría quién ofrece el balance. En términos operativos: *Una experiencia no es otra cosa que una pregunta dirigida a la naturaleza, y la medida la lectura de la respuesta. Pero antes de realizar la experiencia, se debe pensarla, es decir formular la pregunta que se quiere dirigir a la naturaleza, y antes de obtener una conclusión de la medida, se debe interpretarla, es decir, comprender la respuesta de la naturaleza...* Planck citado por Bordieu en *op cit*. Es decir, que los hechos que convalidan la teoría, valen lo que vale la teoría que validan.

La vigilancia epistemológica: Surge en un esfuerzo por captar la lógica del error para construir la lógica del descubrimiento de la verdad. En la práctica científica no se puede pretender construir problemáticas o teorías nuevas sino cuando se renuncia a la ambición imposible de decirlo todo, sobre todas las cosas y, además, ordenadamente.... *el hecho científico se conquista, construye, comprueba e implica rechazar al mismo tiempo el empirismo que reduce el acto científico a una comprobación ... op cit*

Matemática Educativa filial del: *Saber matemático* lo que produce *una mirada sin alumnos*

La problemática clásica en matemática educativa se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban mas accesibles para los alumnos y para los profesores que aquéllas otras presentaciones llamadas tradicionales. Se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Siguiendo esta línea, se produjeron libros de texto y materiales educativos sin tomar en consideración sistemáticamente otros factores como aquellos de naturaleza cognitiva o afectiva o bien los relativos a las cuestiones socio culturales del conocimiento. Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar.

Por ejemplo en el primer número de la revista *Educational Studies in Mathematics* de 1968 se presentan recomendaciones sobre la coordinación de la enseñanza entre los cursos de física y matemáticas. Cabe señalar que no se ofrecen referencias bibliográficas ni referencias sobre un marco teórico a seguir. De entre dichas recomendaciones, destacamos las siguientes a manera de ejemplo:

Las matemáticas constituyen una muy característica actividad de la mente humana. Todos los niños deben ser educados en matemáticas.

Las matemáticas se desarrollan cada vez más hacia una ciencia de las estructuras generales. Estas cuentan con un destacable poder de aplicación, uniformación y unificación. Su conocimiento y el manejo adecuado y su utilización en la realidad son el objetivo real de la enseñanza de las matemáticas. Algunas de esas estructuras son de carácter elemental y deben ser usadas desde la niñez.... Otras, más sofisticadas debe ser adquiridas sólo hasta el fin de la secundaria.

La enseñanza de la física y las matemáticas debe estar bien coordinada.

El mundo físico deviene inteligible a través de conceptos y de su formulación matemática [...] es necesario desarrollar aptitudes en los estudiantes para identificar estructuras matemáticas presentes en situaciones físicas ... particularmente del cálculo algebraico... Para asegurarse de que esto es entendido, los maestros de ambas disciplinas deben explicar cómo esos lenguajes se conectan.

Otro ejemplo de este escenario se presenta en Kent y Hedger (1980). En donde los autores recomiendan que para ver que 3x = 12 es equivalente a x = 12/3... en nuestra experiencia algunos alumnos pueden ver este método en términos de un "movimiento" de los símbolos al resolver la ecuación. Necesitamos "mover" el 3 de su punto de inicio para colocarlo debajo del 12 ofreciendo el diagrama de tal movimiento.

Estas aproximaciones didácticas sin alumnos, hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. En cierta medida la problemática había sido planteada, se le reconoció como un tema de interés; empero, no había sido completamente estudiada. Era necesario modificar y ampliar la problemática de estudio al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.

Matemática Educativa filial del: *Saber psicológico lo que produce una mirada sin escuela*

Hacia la década de los 80's se presentó en la International Conference of Mathematics Education (ICME – 4) un programa de acción en torno del cual se desarrolló paulatinamente nuestra disciplina. A partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal al someter a consideración preguntas como la siguiente: ¿Cómo aprenden las personas? y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? En nuestra opinión, ello dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio, derivando en una aproximación cognitiva a la investigación que realiza observación y descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje. Por supuesto una de las pretensiones de esta aproximación fue que estos estudios cognitivos, en tanto dieran explicación de cómo se aprende matemáticas, pudiesen dar pautas (o al menos aproximaciones) para la articulación de los principios que subyacen a los futuros diseños curriculares.

Uno de los primeros e ilustrativos trabajos en esta aproximación es el de (Herscovics, 1980) publicado en la revista Recherches en didactique des Mathématiques con el titulo "Constructing meaning for linear equations: a problem of representation". El estudio señala como marco teórico un modelo de entendimiento que distingue entre contenido y forma matemática e identifica cuatro modos de entendimiento: instrumental, relacional, intuitivo y formal con base en los trabajos de Piaget, Bruner y Bauersfeld, entre otros. Asimismo se explicita como metodología lo que los autores llaman "Russian teaching experiment" basándose en Menchinskaya (1969) y Kantowski (1979) en esta aproximación y al contrario de las presentaciones escolares usuales se parte de las formas geométricas hacia las algebraicas.

La investigación supone implícitamente que para la construcción de significado de las nuevas formas y operaciones algebraicas, el aprendiz no tendría dificultad en usarlas. Empero la evidencia dice lo contrario:

Los estudiantes tienen dificultades al usar sus ecuaciones para generar pares ordenados a pesar de que éstos les permiten inicialmente derivar las ecuaciones. Conservan el concepto de pendiente y son concientes de su invarianza, pero no pueden recordar o derivar la fórmula para la pendiente. A pesar de que identifican una ecuación dada (y = 2x) con su gráfica, no pueden generar ninguna de las otras ecuaciones lineales. En el postest los 3 alumnos pudieron reconocer y verbalizar la restricción característica en las coordenadas de puntos en una línea horizontal, pero no podían escribir la ecuación.

En esta perspectiva y para el caso de las matemáticas escolares del nivel universitario, uno de los primeros y muy representativos estudios fue el contenido en (Tall y Vinner, 1981). En él se introducen y desarrollan términos como "imagen del concepto" y "definición del concepto". Se dice entonces que el estudiante para definir si un objeto matemático dado es un ejemplo ó un contra ejemplo de un concepto no decide necesariamente sobre la base de definiciones aprendidas, sino con relación a la imagen conceptual que ha sido forjada al filo de su experiencia y que representa *"la total estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos"*. Así los estudiantes pueden dar una definición conjuntista de la noción de función (definición del concepto) y negarse a reconocer como una función a una relación funcional definida por dos expresiones algebraicas diferentes sobre dos intervalos: "una función dada por dos fórmulas". De la misma forma, pueden negarse a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes pero definidas por procesos diferentes. Ello a causa de que su imagen conceptual de una función esta ligada a su representación algebraica única.

A la clásica pregunta: a) cómo es 0.9999.. respecto de 1 y b) Encuentre el valor de la suma 9/10 + 9/102 + ... La respuesta mayoritaria en el primer caso es: 0.999... 1 y se acompaña de diversas justificaciones producto de una visión de la escritura decimal ilimitada: "al escribir 0.999999 como no se detiene jamás, debe ser inferior a uno", Se dice: "es infinitamente próximo a 1, pero no es igual al 1", "justo antes, debe ser el último número antes de 1". En el segundo caso la respuesta mayoritaria: 1, se obtiene por activación del procedimiento de cálculo de la suma de una particular serie geométrica.

Este tipo de estudios proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero, creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva. Pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre los que es la actividad matemática, de sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno. La forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas, en ese contexto, son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cognitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendida de una manera muy diferente a aquella que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término "institución", podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Por ejemplo, los estudiantes suelen creer que...

$2^0 = 0$; $2^0 = 2$; $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)=-8$; $2^{-1} = -2$; $\text{sen}x/x = \text{sen}$; $(10 + 2)/(5 + 2) = 10/5$

(Martínez, 2000) encontró que esas dificultades se presentan en la historia y se inducen desde la enseñanza a través de los textos. Por lo que el problema es más amplio que el de las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Matemática Educativa filial del: *Saber etnográfico* lo que produce *una mirada sin escenarios*

Otra forma de abordar los problemas la constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar los fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado. Tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Un ejemplo, al que nos hemos referido en varias ocasiones, respecto del fenómeno de la propagación del calor y el surgimiento de la noción de convergencia documentado en (Farfán, 1997) reporta como resultado la obligatoriedad de desarrollar la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar el concepto matemático. El tipo de estudio epistemológico que realizamos nos proporcionó la explicación que niega, parcialmente, nuestra hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser mas complejo que aquél que deseamos introducir. Esto último nos indujo al estudio socioepistemológico en las diversas formaciones profesionales de nuestro sistema de educación superior.

Matemática Educativa filial del: *Saber cultural* lo que produce *una mirada sociocultural*

En nuestra Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa tenemos varios ejemplos relacionados con el acercamiento socioepistemologico, citamos algunos resultados a fin de ejemplificar las intenciones del mismo:

Construcción social del concepto del cero entre los mayas antiguos

La formación del cero entre los mayas se caracteriza por la inexistencia de dicotomías, eso favoreció la constitución de la *noción de cero*. El Dios de la lluvia no es *apriori* bueno o malo, sino que lo es simultáneamente, de ahí que la noción de transición entre lo uno y lo otro sea tan importante como los estados mismos

Construcción social del binomio de NewtonEl binomio de Newton se escribe por vez primera como $P+PQ$ y no como $a+b$. (Cantoral, 2000) Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología diferente de la que hoy enseñamos en clase, entre las características que se destacan podemos enunciar:

Un programa en el dominio de la ciencia que busca predecir la marcha de fenómenos mediante la metáfora del flujo de agua.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

Discusión

Todo ejercicio de revisión, por modesto que sea, conlleva irremediablemente al establecimiento separaciones y filiaciones por lo que es conveniente señalar que reconocemos que cada una de las diversas aproximaciones que hemos discutido han aportado resultados y métodos para construir nuestra disciplina. Asimismo reiteramos que buscamos pertinencia, coherencia e identidad de nuestra investigación a fin de beneficiar a nuestros sistemas educativos. Por ello la importancia del ejercicio de reflexión, en nuestra comunidad, de nuestros acercamientos teóricos, métodos y resultados, sometidos a una continua y estricta vigilancia epistemológica sin, por supuesto, caer en exorcismos paralizantes.

Referencias bibliográficas

Bourdieu P. et al (1998). *El oficio de sociólogo* 20ª ed., México: Siglo XXI

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation. *Recherches en didactique des Mathématiques* 1(3), 351-385

Kent y Hedger (1980). Growing Tall. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 137-179

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Tall y Vinner (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

(1968) Final recommendations of the participants about the coordination of the teaching of mathematics and physics. *Educational Studies in Mathematics* (1) 243-2.

El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas[1]

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona. España
gascon@mat.uab.es

Resumen

Este trabajo se estructura en torno a la evolución (no histórica) del *problema* de la *Educación Matemática*. Una vez constatado el fracaso de la *respuesta pedagógica* a dicho problema, surge la *Didáctica de las Matemáticas* que lo aborda tomando en consideración, de manera integrada, "lo matemático" y "lo pedagógico", lo que provoca una doble ruptura: con la *Pedagogía* y con los *modelos epistemológicos ingenuos, transparentes e incuestionables* del conocimiento matemático. En la segunda parte del trabajo se esquematizan muy brevemente las respuestas que proporcionan a dicho problema los dos principales Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el Programa *Cognitivo* y el Programa *Epistemológico*.

1. El problema de la Educación Matemática

Cualquiera que sea la forma de delimitar el objeto de estudio y la problemática de la Didáctica de las Matemáticas, existe un acuerdo básico respecto a la *problemática inicial* común a todos los enfoques en Didáctica de las Matemáticas. Llamaré *"problema de la Educación Matemática"*[2] al problema que genera el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas y que puede describirse inicialmente como sigue:

Si la actividad matemática es una actividad humana, como el lenguaje, ¿por qué la inmensa mayoría de los estudiantes son *ajenos* a dicha actividad? ¿Por qué es tan difícil que los estudiantes *entren* en la disciplina matemática[3] a lo largo de toda la Enseñanza Obligatoria (y más allá)? ¿Por qué los estudiantes no *piensan por si mismos* los problemas matemáticos? ¿Por qué no *plantean preguntas* que vayan más allá de lo que se va a pedir en los exámenes? ¿Por qué no utilizan las matemáticas para *resolver problemas que ellos mismos plantean*? ¿Cómo puede explicarse, en definitiva, el fenómeno relativamente universal de la *alienación matemática*?

A pesar de la complejidad del problema de la Educación Matemático, postulo que para responder al mismo se requerirá un enfoque unitario, esto es, unos principios básicos que permitan reformular y abordar todos los aspectos del problema.

---

[1] Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Algunas de las ideas que aquí se proponen fueron presentadas esquemáticamente por el autor en la comunicación "*Matemáticas y Educación Matemática. ¿Hacia una futura convergencia?*" en el ámbito del Congreso de la Real Sociedad Española de Matemáticas que se celebró en Puerto de la Cruz (Tenerife) entre el 27 de Enero y el 1 de Febrero de 2002.

[2] Se trata, en cierto sentido, del problema inverso al *"problema de Bertrand Russell"* que éste formulaba como sigue en una de sus últimas obras: "¿Cómo ocurre que los seres humanos, cuyos contactos con el mundo son breves, personales y limitados, son capaces, sin embargo, de llegar a saber tanto como saben" (Russell, 1948, p. 5). "

[3] *Acceder* a una obra significa "entrar" en ella. En la escuela esta entrada se realiza a través del estudio. "Estudiar una obra" supone *reconocer la disciplina propia de la obra y someterse a ella.* [...] la escuela impone cierto tipo de exigencias totalmente externas a las matemáticas, recubriéndolas de elementos que les son ajenos y que pueden *obstaculizar el descubrimiento de la verdadera disciplina matemática.* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

2. La respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática

Según el punto de vista pedagógico, todavía muy influyente en nuestra cultura escolar, el problema de la Educación Matemática permanece esencialmente inalterado al sustituir "Matemáticas" por cualquier otra disciplina como, por ejemplo, "educación física", "latín vulgar", "música barroca", "filosofía analítica", "literatura francesa", "química orgánica" o "sociología". La Pedagogía pretende dar una respuesta esencialmente común al problema de la Educación de cualquiera de dichas disciplinas.

De hecho, la Pedagogía se ha construido sobre una ficción histórica fundada en la *disociación* entre lo *"matemático"* (considerado clásicamente como el contenido de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar) y lo *"pedagógico"* (considerado como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña). Se trata de un *mito cultural*[4] fuertemente arraigado en nuestra cultura y del que todavía no nos hemos librado. Este mito es el que legitima culturalmente la existencia de un ámbito propio de "lo pedagógico" y, por tanto, a la Pedagogía como disciplina. En coherencia con este prejuicio básico, la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática:

(a) Empieza por eliminar la disciplina matemática[5] considerada como la causante de la *alienación matemática de los alumnos.*

(b) Postula, implícitamente, que "lo matemático" (como "lo lingüístico" o "lo musical") no es problemático y que, por tanto, puede ponerse entre paréntesis.

(c) Se centra en modificar las estrategias de enseñanza que se suponen esencialmente independientes de las cuestiones a estudiar. Dichas estrategias deben responder a las preguntas siguientes: "¿Qué enseñar[6]?", "¿Cuándo enseñar?", "¿Cómo enseñar?" y "¿Qué, cómo y cuando evaluar?", según criterios preestablecidos e independientes de la disciplina a estudiar.

Hoy en día podemos afirmar sin paliativos ni reservas de ningún tipo que *la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática ha fracasado absolutamente*: por una parte, la eliminación la disciplina matemática no ha hecho más que agravar el problema de la *alienación matemática* de los alumnos y, en lo que se refiere a los aspectos más específicos del problema como, por ejemplo: la problemática del paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad; la iniciación al álgebra escolar en la ESO; o el papel que pueden jugar las calculadoras simbólicas en el estudio de las matemáticas; la Pedagogía, simplemente, no tiene nada que decir.

Hay que reconocer, sin embargo, que el enfoque pedagógico conserva todavía una parte importante de su crédito y paraliza el progreso hacia enfoques más eficaces. En mi opinión

[4] Se trata de un mito interesado: "[...] nier le plus possible la dépendance réciproque de l'organisation scolaire et des questions à étudier afin d'étendre le plus possible le champ de l'intervention légitime des pouvoirs –d'Église ou d'État selon les époques– en matière scolaire [...]" (Chevallard, 2000, p. 106).

[5] La noción de "disciplina matemática" se analiza en Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 129-133). Más adelante describiré las principales "dimensiones" o aspectos de la misma.

[6] Esta pregunta, al igual que las restantes, no presupone, en el enfoque pedagógico, ningún tipo de cuestionamiento de los conocimientos matemáticos. Así, las respuestas posibles en dicho enfoque como, por ejemplo: "Se debe enseñar geometría sintética en la E.S.O.", no comportan ningún tipo de análisis de las posibles organizaciones matemáticas escolares en torno a la geometría sintética ni, mucho menos, de las diferentes relaciones que podrían establecerse entre éstas y el resto de las organizaciones matemáticas.

la causa principal de esta situación es la *separación radical* entre la *actividad matemática y la enseñanza de las matemáticas* que se manifiesta incluso dentro de la propia Universidad. Esta separación, que se refleja en una *comunidad matemática escindida* (Gascón, 1993), es el resultado de un complejo conjunto de factores relacionados entre sí, de entre los cuales destacaré los tres siguientes:

A. La influencia académica y política de los Departamentos y Facultades de Pedagogía que hace que éstos continúen teniendo un gran peso en el diseño de los currículos de Primaria y Secundaria (tanto de matemáticas como de las demás disciplinas) y en la formación del profesorado de dichos niveles educativos.

B. La *separación radical* (legal e institucional) entre la comunidad productora del saber matemático, recluida actualmente en la universidad[7] y el ámbito tradicional de la Pedagogía que no es otro que la enseñanza "no universitaria"[8]. Basta recordar la poca incidencia que ha tenido la comunidad matemática nuclear –formada por los investigadores en matemáticas– en el diseño del currículum de matemáticas de la última reforma de la Enseñanza Secundaria, así como su escasa participación en la formación del profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos.

C. La preponderancia del *"modelo popular"* de las matemáticas[9] en las instituciones docentes. Veremos que este modelo, al reducir la "actividad matemática" a series del tipo *"definición-especulación-teorema-prueba"*, expulsa la "enseñanza de las matemáticas" fuera de las actividades genuinamente "matemáticas".

Los efectos combinados de estos factores convergen en una absurda separación entre "hacer" y "enseñar" matemáticas que empobrece ambas actividades (que pueden llegar a ser consideradas como fines absolutos en si mismas) e impide tomar en consideración una *"solución didáctico-matemática"* al problema de la Educación Matemática y renunciar, definitivamente, a la fracasada *"solución pedagógica"*.

3. El modelo popular de las matemáticas

El modelo epistemológico de las matemáticas, que suele sustentarse implícitamente como incuestionable, es el "modelo popular" de las matemáticas. William P. Thurston (1994) describe y caricaturiza dicho modelo en los siguientes términos:

- Los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas fundamentales y de una colección de axiomas "dados" que caracterizan dichas estructuras;
- Respecto de dichas estructuras existen cuestiones importantes y variadas que pueden expresarse en forma de proposiciones matemáticas formales;
- La tarea de los matemáticos es la de buscar una serie de deducciones que enlacen los axiomas con dichas proposiciones o con la negación de éstas.

---

[7] Dieudonné (1987) indica que antes de 1940 el número de puestos de trabajo en la enseñanza universitaria de las matemáticas era muy reducido (menos de 100 en Francia) y, en consecuencia, hasta 1920 algunos matemáticos de la categoría de Weierstrass, Grassmann, Killing y Montel fueron, durante toda o parte de sus carreras, profesores de Enseñanza Secundaria. Pero, en la actualidad, los productores del conocimiento matemático han desaparecido prácticamente de la Enseñanza Secundaria.

[8] La escisión legal entre enseñanza universitaria y no universitaria aumentó dicha separación en España.

[9] Descrito y criticado severamente por el matemático norteamericano William P. Thurston, (1994). En la próxima sección describiré brevemente este modelo epistemológico de las matemáticas así como las consecuencias que acarrea, en las instituciones en las que todavía es predominante, sobre las posibles formas de abordar el problema de la Educación Matemática.

Para dar razón del origen de las cuestiones problemáticas se añade la *especulación* como un ingrediente importante y suplementario de dicho modelo. *Especular* consiste en emitir conjeturas, plantear preguntas, hacer suposiciones inteligentes y desarrollar argumentos heurísticos sobre lo que es verosímil. Se obtiene así el modelo *definición-especulación-teorema-prueba* (DSTP) (Thurston, 1994).

El "modelo popular" constituye, en definitiva, una forma ingenua y simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del *"euclideanismo"* que pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos *(términos primitivos)*. La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad *(pruebas)* (Lakatos, 1978a).

Es fácil mostrar que el *modelo epistemológico de las matemáticas* predominante en una institución escolar (sea éste cual fuere y aunque esté implícito) influye poderosamente sobre las características del *modelo docente*, esto es, sobre la manera sistemática y compartida de organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en dicha institución (Gascón, 2001). En este sentido, se puede afirmar que los *modelos docentes habituales* están sustentados por un *modelo epistemológico ingenuo* (Brousseau, 1987) que, como el modelo popular, aparece a los sujetos de la institución como *la manera incuestionable y transparente* de describir las matemáticas.

Otra de las consecuencias importantes de este modelo epistemológico abusivamente simplificador consiste en que, al ignorar el componente irreductiblemente matemático de los fenómenos de *difusión y comunicación* del conocimiento matemático, separa de una manera radical la *actividad matemática* de la *enseñanza de las matemáticas,* lo que refuerza la pervivencia del enfoque pedagógico.

Pero existen muchos argumentos para rechazar el modelo popular[10]. En efecto, como dice Guy Brousseau, el modelo popular no permite considerar como actividades matemáticas de pleno derecho:

- Las reorganizaciones de los saberes matemáticos, destinadas a posibilitar su difusión social y su estudio.
- Las reformulaciones que faciliten el acceso a nuevas conjeturas y nuevos problemas matemáticos (Brousseau, 1994).

En consecuencia, la asunción absoluta del modelo popular obligaría a la comunidad matemática a considerar que dichas actividades no son "verdaderas matemáticas"[11], en flagrante contradicción con la convicción unánime de la propia comunidad.

4. La doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas

Una vez consumado el fracaso de la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática, emerge la *Didáctica de las Matemáticas* que se constituyó, desde el principio,

[10] El propio Thurston, en total desacuerdo con la naturaleza del trabajo matemático que se desprende del DSTP, propone la elaboración de un modelo alternativo que ponga el acento en que el trabajo del matemático consiste en hacer avanzar la comprensión humana de las matemáticas y en mejorar la comunicación de dicha comprensión.

[11] Incluso se pondría en tela de juicio que las reorganizaciones llevadas a cabo por Euclides e, incluso, por el grupo Bourbaki, fuesen "verdaderas matemáticas".

sobre el postulado de la *necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo "pedagógico" y lo "matemático"*. Éste es el rasgo que caracteriza inicialmente a la Didáctica de las Matemáticas en relación a las restantes disciplinas, como la Historia y la Epistemología de las Matemáticas, que pertenecen al mismo universo que la didáctica y comparten un mismo objeto de estudio. Con más precisión, propongo caracterizar la Didáctica de las Matemáticas, en el ámbito de la Antropología de las Matemáticas, como la *disciplina cuya manera específica de tomar en consideración "lo matemático" consiste en integrarlo con "lo pedagógico"*.

Ésta sería, por tanto, la primera ruptura que permite que emerja la Didáctica de las Matemáticas como una nueva disciplina: la *ruptura con la Pedagogía*. Se trata de una ruptura muy explícita y que difícilmente puede pasar desapercibida. Pero esta ruptura va indisolublemente unida a otra que es menos evidente pero que no es menos importante: se trata de la ruptura con el modelo epistemológico ingenuo del saber matemático y, en particular, con el *modelo popular* de las matemáticas que es predominante en las instituciones escolares. De hecho, veremos que es imposible integrar "lo matemático" y "lo pedagógico" sin cuestionar, a la vez, la naturaleza de "lo matemático". Una de las diferencias básicas entre los distintos enfoques en Didáctica de las Matemáticas consiste, precisamente, en la forma particular en que cada uno de ellos lleva a cabo esa doble ruptura mediante la *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático*. Mostraré que las diferentes formas de "didactificación" pueden comportar cambios importantes en la amplitud del objeto de estudio la Didáctica de las Matemáticas y hasta en la naturaleza de los fenómenos que deben tomarse en consideración.

Simplificando mucho las cosas, postulo que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación que aparecen en cierta reconstrucción racional del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas[12]. En lo que sigue describiré brevemente las características específicas de ambos Programas o enfoques en Didáctica de las Matemáticas, enunciaré sus hipótesis básicas en relación al problema de la Educación Matemática y esquematizaré la respuesta que da cada uno de ellos a dicho problema.

4.1. Ruptura con la Pedagogía: La respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática

Históricamente el nacimiento del Programa Cognitivo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas estuvo determinado explícitamente por la insuficiencia manifiesta de la noción general de *"aprendizaje humano"* para abordar el Problema de la Educación Matemática y la necesidad de modelizar el "aprendizaje *matemático* del alumno". Precisamente, la forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el

[12] Utilizaré la reconstrucción racional (Lakatos, 1971), de la evolución de la Didáctica de las Matemáticas que se describe en Gascón (1998) y que, en cierta forma, expresa mi propio punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, –como objeto de investigación básico de la Didáctica de las Matemáticas– postulo la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su objeto primario de investigación dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos, 1978b) en Didáctica de las Matemáticas: el Programa Cognitivo y el Programa Epistemológico.