# Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 12, tomo 1

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

**Clame** Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

# Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

## Volumen 12, tomo 1

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, VOL 12
TOMO I

**Editora:**
**Rosa María Farfán**

Diseño y cuidado de la edición:
Javier Lezama y Antonio Arellano

Diseño cubierta:
Enrique Oaxaca

Primera Edición:Junio de 1999.



ISBN 970-625-206-1

Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
Nebraska 199. Col. Nápoles
C. P. 03810 México, D. F.
Teléfono: 5 23 09 94. Fax: 5 43 11 73
e-mail: geimex@mpsnet.com.mx.
http://vitalsoft.org.org.mx/gei
Reg. CANIEM 1382

Impreso en México/*Printed in Mexico*

# PRESENTACIÓN

La *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* es el resultado de doce años de esfuerzos que hoy la constituye como el foro mas importante en su campo en el ámbito latinoamericano. Todos los asistentes, en exhaustivas sesiones intercambian sus experiencias, comunican sus ideas y presentan sus resultados rigurosamente, con la intención deliberada de consolidar nuestra disciplina, la **Matemática Educativa,** siempre con el ánimo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de los sistemas educativos de nuestro continente. En esta publicación se agrupan la primera parte de los escritos de ***Relme-12.***

### HISTORIA Y OBJETIVOS DE CLAME

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa se constituyó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que se celebró en Puerto Rico en agosto de 1996. En dicha reunión se acordó también, modificar el nombre a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y continuar la numeración. Al mismo tiempo y con fin de atender organizadamente las demandas de la comunidad, se forma el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, junto con proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina en América Latina. Bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros. Los proyectos que de inicio impulsa el Clame son los siguientes:

- La creación de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (***Relime***). Órgano de publicación oficial de Clame con tres números al año. El objetivo de esta iniciativa es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en la región, sin la restricción de espacio y tiempo que la Relme establece.
- La instauración del ***Premio "Simón Bolívar"*** a la mejor tesis de posgrado en Matemática Educativa" cuyo objetivo es el de estimular a los recién graduados y fomentar entre los jóvenes el estudio de la disciplina. Los ganadores del Premio se dan a conocer en la Relme, junto con los miembros del Jurado en sesión solemne "Cátedra Simón Bolívar" y ofrecen una conferencia de su trabajo de investigación.

- Otro de los proyectos de Clame es la generación de un "Directorio Latinoamericano de Especialistas en Matemática Educativa" que al contener los datos de nuestros colegas y sus áreas de especialización, nos permita establecer una red eficiente de comunicación entre pares.
- Una iniciativa adicional de Clame se dirige hacia la formación de un programa editorial necesario en nuestros países con varias series: libros especializados, libros de texto y materiales de docencia, entre otros. Con la publicación de las tesis ganadoras del Premio "Simón Bolívar", iniciamos la serie de "Investigaciones en Matemática Educativa", algunos colegas de los grupos de trabajo de Relme han presentado propuestas para la elaboración de diversos "Estados del Arte..." que será otra serie. Hacemos una cordial invitación a presentar propuestas para las diversas series que conformarán nuestra biblioteca de Matemática Educativa en Latinoamérica.
- La última de las iniciativas del Clame se ha visto coronada con un éxito. Se ha fundado el Cimate – Centro de Investigación en Matemática Educativa y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Desde ahí, se podrá continuar la publicación de Relime y ofertar un programa de doctorado a distancia con cobertura continental.

**ORGANIZACIÓN DE LA PUBLICACIÓN**

Presentamos en esta publicación el extenso de las diversas participaciones en Relme-12 que fueron presentadas por los autores en la Reunión y aprobadas para su publicación después del proceso de evaluación ya usual en nuestro evento y que sustenta sus dictámenes con base en la calidad del trabajo en comparación de los niveles internacionales de exigencia que suelen pedirse para eventos académicos de esta índole. Las grandes líneas en las que hemos clasificado los artículos son:

- ❑ *Pensamiento matemático avanzado*
- ❑ *Pensamiento numérico*
- ❑ *Pensamiento algebraico*
- ❑ *Pensamiento geométrico*
- ❑ *Pensamiento de Probabilidad y Estadística*
- ❑ *Uso de Tecnología*
- ❑ *Incorporación de distintas perspectivas*
- ❑ *Formación de profesores*
- ❑ *Desarrollo de curriculum*
- ❑ *Teoría y metodología*

## AGRADECIMIENTOS

El principal reconocimiento va dirigido, naturalmente, a todos los colegas que dan vida a *Relme* haciendo posible nuestro encuentro: a todos los participantes y autores de estas actas. Empero deseamos expresar un especial reconocimiento a todos los árbitros y colaboradores editoriales que aportaron su conocimiento, tiempo, esfuerzo y sobretodo entusiasmo en beneficio de la calidad de esta publicación. Por supuesto a los miembros directivos y representantes de Clame en los diferentes países por su colaboración.

Agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia su apoyo profesional y desinteresado, a la Universidad Nacional de Colombia su hospitalidad al albergarnos así como a todas las instituciones y empresas que nos apoyaron con recursos materiales y humanos.

*Rosa María Farfán*
CIUDAD DE MÉXICO, PRIMAVERA DE 1999

# Contenido:

## Pensamiento Matemático Avanzado: Nivel Básico



## Pensamiento Matemático Avanzado: Nivel Medio Superior



## Pensamiento Matemático Avanzado: Nivel Superior

# PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

# Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria

*José Armando Albert Huerta,*
*María Isabel Cázares Serrano,*
*Apolo Castañeda Alonso*

El cálculo, enmarcado en la matemática del nivel superior, tiene un lugar importante en la estructura de los currículos por su valor teórico y empírico (Albert, 1996) procedente de conglomerar a casi toda la matemática elemental; la aritmética, la geometría, el álgebra, y vincular a gran parte de la matemática avanzada; la trigonometría, el análisis, álgebra lineal, variable compleja. Esto explica además la complejidad de su estudio. Sin razón de ser, el cálculo ha adoptado un fuerte carácter algoritmo, de manipular objetos y desarrollar una lógica operatoria para resolver problemas, éste planteamiento escolar no involucra el estudio del significado de nociones y conceptos primarios y reduce la comprensión por la mecanización de la que es objeto esta área. El interés de muchas investigaciones contemporáneas es hacer que el cálculo retome una orientación adecuada y evitar la sobreexplotación de su carácter simbólico, haciéndolo menos analítico, en cuanto a que su estudio incorpore el análisis de situaciones que conduzcan a formalizaciones con un amplio sentido teórico, dar significado a los nociones, organizar los cursos escolares con experiencias cotidianas abordando problemas que permitan manipulaciones simbólicas en relación al desarrollo y nivel cognitivo de los estudiantes.

El infinito es una parte del cálculo que tienen en su naturaleza, la dificultad ser contextualizado con relación al pensamiento de los alumnos porque no es un concepto definido, sino es objeto matemático que se puede describir como una noción. Albert (1996) cita el límite como una idea matemática que presenta dificultad, aunque atrás de esta afirmación está el *infinito* el cual sostiene a la idea de límite (relacionado éste a convergencia y divergencia). Cornú (1993), señala algunos puntos sobre los cuales existen dificultades aprehensión de la idea de límite en donde el infinito tiene una parte esencial. Anna Sierpinska (1985) cita en los obstáculos epistemológicos[1] puntos relativos a la noción de límite, uno de ellos es concerniente a la idea de infinito. Janssen J. (1987) describe que al considerar la fracción 1/9 y convertirlo a decimal periódico 0.11111... los alumnos tienen la oportunidad de desviarse hacia las series.

El infinito tiene una relevante importancia dentro de la matemática de nivel superior por la relación que guarda con varias ideas que subyacen en el cálculo, su posición estratégica requiere de una especial atención debido a que su tratamiento dentro de los curricula es casi mínimo, se deja a intuiciones personales para que lo describan o contextualicen. Un abanico de interpretaciones se pueden recoger de las concepciones de los estudiantes, infinito

[1] Término de Gaston Bachelard (1938) e introducido en Matemática Educativa por Guy. Brousseau en 1983

actual o potencial, un infinito vinculado a la cultura del estudiante; *el universo es infinito,* o *los números reales son un conjunto infinito,* cuando una función tiende al infinito, o cuando se opera como número; $\frac{c}{0}=\alpha$, $c\cdot\alpha=\alpha$, $\frac{\alpha}{c}=\alpha$, $\frac{c}{\alpha}=0$.

Estas múltiples concepciones del infinito muestran que un concepto finamente pulido y presentado a los alumnos, no servirá de mucho dado que esta idea es utilizada desde diferentes ámbitos, el infinito entonces, juega el papel de noción para poder ser utilizada bajo diferentes operaciones en la matemática superior.

La construcción de esta noción debe ser contextualizada bajo sus diferentes significados asociados para ser usada dentro del conocimiento matemático superior, esta debe ser tratada desde temprana edad atendiendo a dos implicaciones en términos didácticos: *la estructura cognitiva asociada a un concepto (la cual incluye todas las representaciones mentales, las propiedades y procesos asociados) pueden contener el germen de un conflicto futuro* (David Tall y Schlommo Vinner, 1981) y la segunda es tratar esta idea desde sus primeras interacciones con la matemática, partiendo de intuiciones originales para poder orientarlas y expresarlas en situaciones que permitan llegar a concepciones claras, e incluso hasta formalizaciones. Al intentar recuperar todas aquellas ideas que acompañaron al desarrollo de la noción actual del infinito, el papel que juegan las primeras relaciones objetivas con respecto al infinito se aprecian valiosas, así; las paradojas, los experimentos o las construcciones geométricas reflejan el génesis en la construcción de esa noción que evidentemente se rescatan como antecedentes epistemológicos. La visualización, la comparación o los juicios intuitivos tienen un importancia central al ser operaciones mentales sobre las cuales se inicia con la contextualización teórica del infinito. Un acercamiento geométrico al infinito intenta describir situaciones que denoten la presencia de características que definan y enmarquen la noción de infinito como un estado.

El ambiente gráfico se consideró como fuente de razonamientos incorrectos derivado de apreciaciones ausentes de fundamento. (Moreno A., 1994), la parte geométrica fue desplazada por las contundentes y detalladas demostraciones analíticas. Pero cuando los trabajos de Julia y Fatou sobre iteración de funciones surgió, la descripción analítica de esos fenómenos no dejaban apreciar lo que realmente sucedía. En los años 70, Benoit Mandelbrot retomó los trabajos de Julia para definir a una colección de nuevos objetos llamados Fractales.

Los fractales acercan las estructuras analíticas a formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común; repiten procesos infinitos, este orienta a concebir una construcción fractal como una figura autosiliar, es decir todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Lejos de ser vistos como monstruos o figuras raras, los fractales tienen propiedades específicas de alto valor matemático: a) son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas; para construir un fractal es necesario ejecutar un algoritmo, procedimiento o elemento generador y repetirlo sin parar, b) son objetos que se detallan a través de representaciones gráficas y ofrecen un acercamiento analítico que puede explicar su comportamiento.

Estas construcciones además de sus propiedades vinculadas al infinito, son objetos que permiten ser analizados a través de la *visualización*, entendido a ésta operación como una herramienta que permite acercarse a comprender procesos ocultos como los *patrones de cambio*. En esta línea, entender los procesos de cambio en los fractales de acuerdo a la transformación de la misma figura, identificar porqué cambio, así como controlar ese mismo cambio. Existen muchas familias de fractales, para cuestión de esta investigación se contempla el uso de fractales sencillos los cuales no representen obstáculo al intentar desarrollarlos, como por ejemplo; *Curva de Von Koch, Tapiz de Sierpinski, Triángulo de Sierpinski, Curva de Peano, Triángulo de Von Koch, Polvo de Cantor.*

Para los griegos el infinito representó un objeto matemático que caía fuera de cualquier argumento material. Intuitivamente se objetó por decir que, el infinito se podía alcanzar en forma *potencial.* La matemática griega obligó a evitar el uso del infinito al referirse un presunta existencia del infinito actual. (Zellini). El delimitar y conceptualizar el infinito implicó que se aceptara a éste como un objeto que podía cambiar de naturaleza, de un proceso *continuo* a uno *discreto.* Los griegos tuvieron en su experiencia concreta, una fuente de obstáculo que no les permitió alcanzar a concebir al infinito como límite que representara una solución final. Expresar el infinito requiere aceptar que *potencialmente* existe en un proceso de cambio al agregar "elementos" interminablemente y por otro lado que existe un infinito real o actual que representa una entidad (objeto finito) (Sacristán, 1997). Así la investigación se rige en analizar los esquemas de respuesta de la construcción de la noción del infinito en estudiantes de secundaria por medio de algunos fractales sencillos. En tanto la principal pregunta de investigación remite a examinar ¿cómo la construcción de fractales puede ayudar a superar los obstáculos epistemológicos asociados y a construir la noción del infinito en los estudiantes?

Los resultados de investigación abren la posibilidad de influir positivamente a los sistemas escolares, aunque técnicamente *no existe una metodología que asegure resolver todos los problemas de la enseñanza de la matemática,* es importante no refugiarnos en metodologías investigativas que confieran en alto grado a la estadística o a las inferencias de tipo numéricas para presentar sus resultados debido a que son insuficientes para explicar el complejo sistema, se hace importante estudiar en forma conjunta a todas las variables que están presentes implícita o explícitamente dentro del salón de clase como un todo que se articula en torno al proceso enseñanza-aprendizaje. En estos términos, la Ingeniería Didáctica ofrece un acercamiento sistémico incorporando ampliamente el estudio las partes involucradas en el fenómeno en tres direcciones principales: plano congintivo, plano didáctico y plano epistemológico, a lo cual, por este carácter integral, la abordaremos para motivos de la investigación.

El realizar un estudio epistemológico con respecto a la construcción de la noción de infinito tiene su fundamento en conocer, la naturaleza de esta idea matemática vinculada históricamente, analizando cuales han sido las concepciones y bajo que argumentos se ha ido modificando. Por un lado, Piaget quien menciona que la construcción del conocimiento en los estudiantes tiene similitud a la sufrida por la humanidad en el curso de la historia, y por otra, la idea de fundamentar la investigación en un ambiente constructivista (en donde el estudiante construye su conocimiento, en situaciones didácticas, por ejemplo), conduce a indagar en la historia de la matemática las relaciones conceptuales y las ideas asociadas que se involucraron para expresar una definición o idea aproximada con el fin de tomarlas en consideración en el momento de diseñar las secuencias. En este análisis, buscar las dificultades presentadas entorno al surgimiento de la noción de infinito, con el fin de prever posibles puntos de conflicto con los alumnos en el momento de enfrentarlos a una situación. Así, el diseño de situaciones representa el eje sobre el cual se hace el estudio de las respuestas de los estudiantes; observando el ellos los comportamientos cognitivos en sus actividades y examinando puntualmente los conceptos e ideas que se involucran a fin de tener conocimiento de sus errores y dificultades así como de posibles obstáculos epistemológicos, (los cuales puede ser los mismos enfrentados por la humanidad en el desarrollo de la matemática o incluso nuevos) permitiendo delimitar el marco, las circunstancias o incluso ideas en el cual sucedieron los hechos y saber cuál puede ser el más conveniente, (como un modelo de retroalimentación), por ejemplo las nociones intuitivas y las concepciones pre-matemáticas en torno al infinito.

Con el fin de desarrollar una secuencia de actividades encaminadas a construir la noción de infinito en su dualidad intrínseca, el análisis anterior proporciona variables a considerar por sus repercusiones didácticas. Estas variables describen las dificultades y puntos sobre los cuales es necesario dedicar especial cuidado a fin de que los estudiantes no tengan obstáculos (caracterizadas en las tres dimensiones) para lograr las construcciones deseadas. El cuidado es descrito en el sentido de no trivializar las ideas subjetivas u objetivas que acompañan a la noción de infinito. Así, la situación puede ayudar a superar los obstáculos epistemológicos asociados al infinito. Y por otro lado identificar las situaciones en matemáticas donde el infinito tiene diferentes caracterizaciones aunque sigue siendo la misma idea. La secuencia aplicada se encuentra estructurada de la siguiente forma: se dividió en tres partes, la primera es exploratoria y las otras dos se pretende que el alumno se enfrente a una situación que le provoque conflictos y utilizado sus argumentos contradictorios pueda construir su propio conocimiento.

La idea de que la enseñanza de la matemática se desarrolla en un orden estrictamente lógico es una creencia generalizada entre los profesores, que ha modelado entre otras cosas los programas escolares. No obstante, la importancia de reconocer la participación de otros elementos como los aspectos cognitivos de los estudiantes, la evolución de la naturaleza del conocimiento, los modelos teóricos de cómo aprenden los estudiantes como parte importante del ámbito escolar, ha conducido a entender el fenómeno educativo como un complejo sistema que requiere de acercamientos sistemáticos para poder diseñar modelos de solución a su problemática. La investigación se ha orientado en buscar los puntos de conflicto al rededor de la noción de infinito y tratar de hallar parámetros que coadyuven a la solución de la problemática que ésta noción genera en el ámbito escolar. Así, orientados en la metodología de investigación de *Ingeniería Didáctica*, el trabajo retomó puntos de análisis en tres dimensiones, epistemológico, cognitivo y didáctico.

Resultado del análisis epistemológico, en términos generales, se concluyó que el surgimiento de la noción de infinito estuvo modelada por los fenómenos físicos y esta concepción con carácter *potencial* no permitió que se alcanzara a modelar un infinito *actual*. La matemática griega que guardó un carácter discreto vuelve a repetirse en la historia de aprendizaje de los estudiantes, quienes consideran que los problemas relacionados con el infinito son *potencialmente interminables*, y no existe en ellos una idea de la *actualidad* del infinito. La didáctica en torno al infinito es reducida y, en el caso de los libros de texto, presuponen que existe una noción de lo que es *infinito* a comparación de lo que es finito. Es decir, los fenómenos infinitos son los que en términos pragmáticos son imposibles de concluir. A partir de la secuencia didáctica aplicada, se hallan los problemas siguientes:

- La noción de infinito no esta claramente delineada.
- El infinito potencial obstaculiza el manejo del infinito actual
- Existe una tendencia a corresponder la noción de infinito a fenómenos físicos.

En relación a esto, los estudiantes lograron diferenciar la idea de infinito potencial e infinito actual, identificando patrones numéricos (series). Para atender a la necesidad de apreciar fenómenos infinitos (en forma gráfica) el fractal propuesto ayudó a asociar la idea de serie infinita a un cuerpo geométrico. Este primer acercamiento al problema, nos ha demostrado que los fenómenos alrededor de la noción de infinito presentan dificultad de concepción por lo que deben ser tratados con especial atención. Bajo esta idea el trabajo de investigación realizado, ha delineado y contextualizado el problema con respecto a esta noción matemática y se han recogido elementos que permiten demostrar la existencia de una problemática asociada en el ámbito escolar. El uso de los fractales, como acercamiento a un modelo de solución a la problemática, puede ser apoyada por el uso de computadora empleando *software fractal* o *programación*, bajo esta temática el sentido para el desarrollo de la investigación estaría orientada en el estudio y diseño de situaciones que involucren actividades en laboratorios de matemáticas, usando computadoras o calculadoras gráficas.

**Referencias bibliográficas:**


**Artigue, M**. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence, Francia: IREM

**Braun, E**. (1986), Un movimiento en zigzag, *Colección la Ciencia desde México*, México, Fondo de Cultura Económica.

**Boyer, C**.(1968), *A History of Mathematics*, USA ,Wiley,

**Collerl, A**. (1994). La Intuición y el concepto de límite, *Educación Matemática*, México, Vol. 6, No. 2, pp. 12-28.

**Collette, J**. (1986), *Historia de las Matemáticas*, México, Edit. Siglo XXI,

**Farfán, R**. (1997) Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio, México, Grupo editorial Iberoamérica.

**Kattsoff, L y Simone, A**. (1997), Matemática finita, con aplicaciones a las ciencias administrativas, México. Edit. Trillas.

**Moreno, L**. (1994), La Geometría del Desorden y un Nuevo Diseño Curricular, *Educación Matemática, México*, Vol.6, No. 3, pp. 52-64

**Moreno, L. y Waldegg, G**. (1995), Variación y representación de un número al continuo. *Educación Matemática*, México, Vol. 7, No.1, pág. 12-28.

**Peterson, I.**, (1998), *The mathematical Tourist*, New York U.S.A. W.H. Freeman and company,

**Peitgen, Heinz-Otto y otros** (1991*), Fractals for the Classroom: strategic Activities Volume One*, National Council of Teachers of Mathematics, Springer-Verlag,(USA)

**Sacristán, A.**, (1988), Procesos Infinitos: Centración en la intuición. México, *Tesis de Maestría no publicada*, CINVESTAV,

**Sacristán, A.** (1997). Windows on the Infinite: Constructing Meanings in a Logo-Based Microworld. Institute of Education, University of London, *Tesis de Doctorado no publicada*,

**Scott, J. F**.(1958). *A History of Mathematics*, London, Taylor & Francis LTD.

**SEP**, (1975), *Matemáticas I*, México, Editora Mexicana S.A. de C.V.

**Shiffer, I**. (1996), La Ciencia del caos, *Colección: la Ciencia desde México*, México, Fondo de Cultura Económica.

**Talanquer, V**. (1996), Fractus, Fracta, Fractales de laberintos y espejos, México, *Colección la Ciencia desde México*, Fondo de Cultura Económica.

**Waldegg, G**. (1987) Esquemas de respuestas ante el infinito matemático. Transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito. México, *Tesis de Doctorado no publicada*, CINVESTAV.

**Waldegg, G**. (1993). El Infinito en la Obra Aristotélica. *Educación Matemática*, México, Vol. 5, No. 3, pp. 20-38.

# El papel de las representaciones (numérica, gráfica y analítica) en la resolución de problemas de matemáticas.

Ramiro Avila Godoy
Universidad de Sonora. México.

## Introducción.

Desde hace varios años hemos estado desarrollando un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental es tratar de entender el papel que juegan las representaciones (gráfica, numérica y analítica) en la formación de los conceptos de función y derivada de una función. El desarrollo de este proyecto ha implicado acciones encaminadas a dar respuesta a algunas interrogantes relacionadas con el problema general de la investigación. En este escrito reportamos los resultados de una investigación específica a través de la cual tratamos de responder la siguiente pregunta:

¿Qué papel juegan las diversas representaciones de las funciones (gráfica, numérica y analítica) en el análisis y resolución de problemas de matemáticas? (entendiendo, aquí, por problemas de matemáticas aquellos en los cuales el cuestionamiento se formula sobre una expresión analítica).

## Consideraciones acerca del problema.

La resolución de problemas de matemáticas ha sido objeto de una gran cantidad de investigaciones recientes, investigaciones originadas por una diversidad de motivos e interrogantes. Alan Schoenfield, Fernando Hitt, Luz Manuel Santos, entre otros, han realizado investigaciones en relación con esta problemática. Una investigación particularmente importante, como antecedente de ésta que ahora reportamos, es la que realizaron John Selden, Alice Mason y Annie Selden, de la Tennessee Technological University, y que aparece reportada en el Journal of Mathematical Behavior en 1989 (págs. 45-50) con el título de "Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?". Una primera y contundente conclusión de este estudio es:

*muchos de los estudiantes que aprobaron el curso de cálculo no pueden resolver problemas no rutinarios de esta materia*

conclusión que considero puede generalizarse, sin mucho riesgo de errar, para los estudiantes de un curso similar (primer curso de Cálculo a nivel universitario) en cualquier otra universidad del mundo. Basado en esta conclusión surgieron varias interrogantes respecto a la manera en que proceden las personas que sí tienen éxito en la resolución de este tipo de problemas, algunas de esas interrogantes son: ¿cómo logran, dichas personas, concebir la estrategia de solución?, ¿qué es lo que origina que se les ocurran las ideas que conducen al diseño de dicha estrategia?.

Dado nuestro interés en entender el papel de las representaciones en la formación de los conceptos de función y derivada de una función, los cuestionamientos anteriores dieron lugar a la formulación concreta del problema que es razón de este reporte. Lo anterior significa que estamos interesados en investigar específicamente el uso que hacen de las diversas representaciones (gráfica, numérica y analítica) de los conceptos de función y derivada de una función, las personas que tienen éxito al resolver problemas de matemáticas.

Para tratar de responder la interrogante planteada, elaboramos el siguiente :

**Cuestionario.**

1. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en (0,1 ).
2. Demostrar que la ecuación $x^n + px + q = 0$ no puede tener más de dos raíces reales, si n es par; ni más de tres, si n es impar.
3. Resolver la desigualdad $2\sqrt{x} \rangle 3 - \frac{1}{x}$
4. Comparar las funciones y = Sen x + Tan x y y = 2x en $(0, \pi)$ .
5. Supóngase que f(x) es una función continua y derivable en [ 0,1 ], que f(x) está en [ 0,1 ] para todo x y que .f'(x) $\neq$ 1 para todo x de [ 0,1 ]. Demostrar que existe exactamente un número x en [ 0,1 ] tal que f(x) = x.

**La Metodología.**

La elección de cada uno de los problemas del cuestionario se hizo con los siguientes criterios:

a) que no fueran problemas rutinarios, esto es, de los que en los textos se usan como ejercicios.

b) los tres primeros problemas se redactaron de tal manera que pudieran evocar más los métodos del álgebra que los del cálculo; para esto se evitó utilizar los términos función y derivada y en cambio se habla de ecuaciones y desigualdades.

c) que todos pudieran interpretarse como problemas sobre funciones.

Para obtener respuestas exitosas a los problemas se decidió aplicarlos a profesores de Matemáticas de bachillerato y universidad, específicamente profesores de Algebra y Cálculo.

De los cuestionarios que se aplicaron se seleccionaron 32, que son aquellos en los cuales la persona que lo resolvió tuvo éxito en al menos un problema.

El análisis se hizo problema por problema, considerando dos momentos, el del análisis de la información proporcionada y el del diseño de la estrategia o plan de solución. Al analizar la etapa en la cual la persona (que está tratando de resolver el problema) está interpretando la información que se le proporciona, nuestro interés estuvo centrado en ver las significaciones evocadas por dicha información, en especial, tratando de percatarnos si se evocaban los conceptos de función y/o derivada y, en los casos en que así fuera, cuál era la imagen evocada, es decir, si se evocaba la expresión analítica o la representación gráfica o la numérica, o más de una de ellas, lo cual, en términos operacionales se tradujo en ver cuántos profesores intentaron resolver el problema con los métodos del Algebra y cuántos lo transformaron en un problema sobre una función

El análisis de la etapa de resolución del problema propiamente dicha se hizo también tratando de ver la forma en que las significaciones evocadas se utilizaban en el diseño de la estrategia de solución.

**Los Resultados**

En esta presentación de los resultados de los análisis mencionados, se consideran los problemas formando dos bloques: uno, constituido por los tres primeros que, en la enseñanza tradicional se abordan en los cursos de Algebra ya que explícitamente se refieren a solución de ecuaciones y desigualdades y por ello, pudieran conducir al uso de los métodos con que se abordan tales problemas en dichos cursos; y otro, en el que se consideran los dos últimos, que corresponden a un curso de Cálculo y en el que se hace referencia explícita a funciones y derivadas.

En relación con los tres primeros hubo un total de 72 intentos de solución, de los cuales 53 traducen los problemas a problemas sobre funciones; mientras que los 19 restantes los tratan con métodos algebraicos.

De los 53 que traducen los problemas a problemas sobre funciones, 45 las representan gráficamente, mientras que los ocho restantes utilizan sólo la representación analítica. De los 45 que reformulan los problemas planteándolos como problemas relativos a la gráfica de una función, 25 los resuelven correctamente y de éstos 25, 10 lo hacen utilizando los métodos analíticos del Cálculo, 12 los resuelven haciendo sólo consideraciones visuales, esto es, manifestando que lo que afirman se ve en la gráfica; los 3 restantes hacen consideraciones tantos visuales como analíticas. Otros 6 de los 45, proceden de manera similar a los 25 ya mencionados, aunque sus respuestas son sólo parcialmente correctas. Los 14 restantes obtienen conclusiones incorrectas o no logran obtener una respuesta.

De los 8 que dan un tratamiento puramente analítico a las funciones, sólo uno lo hace de manera incorrecta, los otros 7 tienen éxito. En cambio de los 19 que trataron el problema con métodos algebraicos, sólo 5 tuvieron éxito y 2 lo hicieron parcialmente bien, mientras que 12 no lograron probar lo que se pedía (en el caso de los dos primeros problemas), o no pudieron resolver la desigualdad de manera correcta (en el caso del problema tres).

Por lo que respecta a los problemas 4 y 5, que explícitamente se plantean como problemas sobre funciones, resulta lógico que los intentos de solución sean todos utilizando argumentos del Cálculo. Hubo 29 intentos de resolver el problema 4, de los cuales 26 recurrieron a la representación gráfica de la función, los otros 3 utilizaron la representación numérica. De los 26 que recurrieron a la representación gráfica sólo 10 lograron conclusiones correctas, 5 de ellos lo lograron utilizando un tratamiento analítico de la función, 4 a partir de consideraciones visuales y uno haciendo consideraciones numéricas. Hubo 19 intentos fallidos, 11 de ellos, que no obtuvieron respuesta, hicieron algunas consideraciones visuales sobre las gráficas o sólo bosquejaron dichas gráficas (no siempre correctamente), 4 hicieron consideraciones gráficas y numéricas; uno, gráficas y analíticas; y los tres restantes sólo hicieron algunas consideraciones numéricas sobre las funciones.

Hubo sólo 11 intentos de resolver el problema 5; 7 de esos intentos fueron exitosos, 3 fueron parcialmente correctos y uno quedó inconcluso. De los 1 1 intentos, 7 utilizan la representación gráfica de la función (cuatro dan argumentos analíticos y tres hacen consideraciones visuales); los cuatro restantes dan un tratamiento puramente analítico a la

función (dos consiguen hacer la demostración de manera completa y dos resultan parcialmente correctas).

El análisis de la forma en que los profesores han procedido al tratar de resolver los problemas utilizados en esta investigación nos lleva a formular las siguientes:

**Conjeturas y Conclusiones.**

Un alto porcentaje (más del 80%) de los profesores que participaron en esta investigación resolviendo los problemas, utilizaron el concepto de función para interpretar la información proporcionada a pesar de que no se hacía referencia explícita a ella (el caso de los tres primeros problemas).

Y de quienes reformularon los problemas planteándolos como problemas sobre funciones (en total 93 casos), más del 80% diseñó su estrategia de solución a partir de la representación gráfica de las mismas. Un ejemplo de este proceder (y son muchos los que podrían citarse) es el siguiente : Un profesor dice : Hacemos .$f(x) = x^3 - 3x + c$ (en el caso del problema 1 ) y probaremos que no puede intersectar dos veces al eje X en el intervalo (0, 1) y a continuación dibuja las curvas que representan las diversas formas en que una curva polinómica de tercer grado puede cortar al eje X.

Independientemente de la evocación gráfica que hacen de la función, los profesores pueden ser clasificados en, al menos tres tipos, por la manera en que presentan sus argumentaciones: los que consideran las gráficas mismas como argumentos y dicen "se ve claramente en la gráfica..." y lo esgrimen como una prueba; los que a partir de la gráfica elaboran una estrategia de solución al problema y la desarrollan con argumentos analíticos; y los que conciben la estrategia a partir de la gráfica y muestran que los argumentos son válidos a partir de observar el dibujo, pero consideran que esa no es una forma adecuada de argumentar y sólo lo hacen por no ocurrírseles otra, cosa que manifiestan explícitamente diciendo: "... ésta, tal vez no es una demostración, pero convence".

En realidad se han formulado algunas otras conjeturas en relación al papel que juegan las diversas representaciones de los conceptos de función y derivada en el análisis y resolución de problemas de matemáticas, pero desgraciadamente en un espacio tan limitado no es posible escribir más.

**Referencias bibliográficas:**

**Avila, R**. El papel de las representaciones en el proceso de formación de los conceptos de función y función derivada. Un proyecto de investigación. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana...* (Vol. I, pp. 35 a 40).

# Diseño de situaciones didácticas de resignificación: El caso de la derivada como una organización de las derivadas sucesivas

*Ricardo Cantoral & Rigoberto González*
*DME - Cinvestav del IPN, Conacyt- México*

**Presentación:** Nuestro estudio constituye un proyecto individual que forma parte de un proyecto global de grupo llamado Pensamiento y Lenguaje Variacional, el cuál esta siendo desarrollado en el Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav y sus componentes se están realizando por distintos integrantes del proyecto. Para saber un poco más acerca de lo que entendemos por Pensamiento y Lenguaje Variacional escribimos:

> *"El pensamiento y lenguaje variacional trata del estudio del cambio a través de su variación, lo hace desde una orientación múltiple que atiende a las distintas dimensiones humanas, la cultural, la individual y la social; lo cual se manifiesta respectivamente en lo conceptual, lo cognitivo, lo didáctico y lo socio-epistemológico (Cantoral 1997; González, 1998)"*

Desde el punto de vista de la matemática, ¿qué ocurre cuando evocamos a la derivada? Inmediatamente se piensa en la primer derivada, pero lo que nosotros queremos decir es: "no, la derivada no debe entenderse sólo cómo la primer derivada, la derivada debe ser otra cosa, algo que permita organizar a las derivadas sucesivas", eso ¿qué quiere decir? Esa frase quiere decir que hay distintos sentidos de una noción, una de esas ya citada en otros trabajos es la siguiente: "*las nociones matemáticas no pueden reducirse a su definición*". La pregunta fuerte es: si no pueden reducirse a su definición ¿entonces a qué? Bueno el problema de inicio es ese, si la derivada no puede reducirse a su definición, es decir, a la primer derivada, entonces ¿cómo vamos a hacer aparecer la noción de derivada cómo la manera adecuada de enfrentar una clase de problemas? Nuestro modelo teórico dice que para poder hacer investigación no sólo basta con un conjunto de creencias, sino que además se debe tener una hipótesis sobre el origen del conocimiento, además de observar cómo este funciona en la escuela. Por eso volvimos la mirada hacia una tesis epistemológica que sostiene Boss (Boss, 1973) sobre la obra de Leibniz.

**Nuestro problema de investigación:** A partir de los resultados obtenidos en un segundo estudio exploratorio, nuestro problema de investigación consistió en probar que la presentación de derivada como primer derivada hecha en los libros y enseñada por los profesores en el aula, es una obstrucción para el aprendizaje de la noción de derivada. Asumimos que la obstrucción consiste en que entienden a la primer derivada, segunda, tercera,... como una iteración. Por este motivo nuestro problema de estudio consistió en diseñar situaciones en donde se pueda dar una adecuada resignificación a la derivada.

**Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología; Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado, Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional: 26345-S**

**Marco Teórico:** Utilizamos la aproximación socio-epistemológica propuesta por Cantoral (Cantoral, 1997), la cual tiene cuatro dimensiones a saber:

- *Funciones cognitivas.* Referida a los procesos del pensamiento.
- *Epistemología naturalista.* Referida a como se construye el saber.
- *Las situaciones didácticas.* Referida al escenario en el que interactúan maestro, alumno y saber.
- *Socio - epistemología.* Referida a la necesidad social del conocimiento.

En la aproximación socio-epistemológica, es posible considerar el empleo de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, por medio de esta pueden guiarse las experimentaciones en clase, por otro lado, se hace uso de un análisis a priori del control experimental correspondientes a las situaciones didácticas. Este control es esencial, pues junto con el análisis a posteriori se dió validez a la ingeniería didáctica realizada.

**Componente cognitiva:** La obstrucción a la que nos referimos consiste en asumir a la derivada como un concepto ausente de la noción de derivada sucesiva entendida exclusivamente como una iteración. La derivada sucesiva entendida exclusivamente cómo una iteración sin significación propia produce una serie de dificultades didácticas considerables que mostramos en nuestro estudio, él cuál incorporó esta dimensión conceptual de la derivada y se dió a la tarea de diseñar y evaluar una situación didáctica de resignificación de las derivadas sucesivas. Dado lo novedoso de la tesis que sostenemos, tuvimos que desechar las aproximaciones tradicionales en didáctica del cálculo. Enfoques que se constriñen a señalar y clasificar las dificultades de los alumnos ante una serie de preguntas matemáticas. Pues dichas investigaciones, suelen asumir que los objetos matemáticos existen previamente y que las dificultades didácticas se encuentran analizando "la distancia" entre las imágenes formadas entre los estudiantes y los objetos matemáticos "deificados". Dichos estudios suelen centrarse en la búsqueda de la estructura conceptual de los objetos matemáticos o de las concepciones espontáneas de los estudiantes, o bien se centran en el examen de la forma en que dichas concepciones evolucionan con la enseñanza, o en la relación que puede establecerse entre el pensamiento del profesor y las concepciones de sus alumnos. Dichos enfoques suelen modelar al pensamiento, al conocimiento, las concepciones, los errores, los obstáculos, o las estructuras apoyándose en diversos modelos teóricos. En nuestro caso, por el contrario, no asumimos la existencia de un objeto matemático -la derivada- sin un uso, sin un proceso de significación y de significación progresiva. En nuestro enfoque, requerimos identificar las actividades necesarias para construir al objeto. Tanto desde el punto de vista del alumno como de los equipos y del maestro. Fue necesario prever los momentos de intervención de los alumnos y del maestro en el diseño de las actividades didácticas.

**Componente epistemológica:** Boss sostiene que la noción de derivada surgió hasta que se abandonó la noción de derivada geometrizada: esta idea de que un diferencial de volumen respecto de un diferencial de longitud, dará un diferencial de área; un diferencial de área respecto de un diferencial de longitud, dará un diferencial de longitud; un diferencial de longitud respecto de otro diferencial de longitud me dará... pero ¿qué ocurría en ese momento? Ni Leibniz, ni Bernoulli seguían derivando, se les había terminado el universo ¿qué fue necesario entonces para que la noción de derivada apareciera? No apareció en Leibniz, en él esta el cociente que es otra cosa, de hecho otro estudio del grupo de investigación con alumnos exhibe lo mismo, los estudiantes entienden perfectamente bien al cociente, pero no a la razón, ¿qué es la pendiente de una recta? "esto entre esto", no es "tres" que significa que esta recta esta más inclinada que esta otra, bueno, entonces la epistemología nos aporta esto. Otra fuente la muestra Cantoral, él encontró que una de las dificultades en la construcción del concepto de derivada por la vía geométrica es la concepción griega de tangente que los estudiantes forman anteriormente como algo que toca pero no corta.

**Situaciones didácticas:** La idea no es tan simple, tiene que haber algo más, algo que permita ir rompiendo cierto tipo de obstrucciones cognitivas, lo que permita apropiarse de la idea, pues de un conjunto de situaciones-problema cómo los que muestra González (González, 1998) hemos analizado cómo los estudiantes y los profesores pueden o no representar segunda, tercer,... derivada ausentándose de la explicación geométrica, para lo cuál hay preguntas geométricas, numéricas, analíticas y verbales que nos permiten encontrar esa explicación y nos está permitiendo encontrar que también los estudiantes, al igual que Leibniz y Newton y al igual que los profesores están encontrando la misma obstrucción. Otra labor de grupo consiste en la observación alrededor de dos o tres años cómo un profesor enseña a la derivada y, se ha encontrado que no puede verbalizar la diferencia entre segunda y tercer derivada. Si se empieza a hablar de problemas de tercer derivada, la verbalización del problema se reduce al mínimo al grado que se queda sólo en el manejo del simbolismo ¿qué podríamos sacar cómo conclusión de ese estudio de la didáctica? Que a nivel de la gestión escolar de esta misma idea en el salón de clases, la lengua natural no nos dota para hablar de variaciones más allá de orden dos.

**Componente socio - epistemológica.** Los aspectos socio - epistemológicos están vinculados a la cultura. Si hacemos un análisis epistemológico por ejemplo de Newton, debemos también entender de que manera se vio influido por ejemplo de la física o la matemática de un siglo anterior, entonces nos estamos basando en la cultura, entendida como todo aquello que ocurre en toda una colectividad por hábitos, costumbres etc., cuando queremos contestar por qué Newton construyó la diferencial de esa manera, encontramos que esa necesidad debió provenir de un cierto entorno que le hacia percibir que eso era necesario. Si no hacemos caso de esta componente, vamos a analizar la obra de Newton como su producción y punto, es decir, no entenderemos por qué él creyó que eso era necesario que debía hacer.

**Resultados:** Encontramos tres teoremas factuales, brevemente uno de ellos consiste en suponer, por parte de los estudiantes de bachillerato y por parte de los profesores que si $f'(a)$ es positiva, entonces la segunda y tercer derivada serán también positivas. Parece que nadie tiene una interpretación de la tercer derivada, ni física, ni geométrica, ni los profesores tampoco, eso no necesariamente obedecería a su comprensión. Otra dificultad de tipo cognitivo encontrada tanto en estudiantes como en profesores, es que piensan a la concavidad como un prototipo.

**Conclusiones:** Afirmamos que "se entiende a la derivada como la primer derivada, pero eso es una obstrucción para entender a la derivada en un sentido más". Nuestra tesis es que la articulación de las derivadas en el sentido que hemos dicho es una condición para la construcción del concepto de derivada, y por lo tanto para desarrollar pensamiento y lenguaje variacional, entonces ahora podrían salir situaciones a - didácticas que permitan o provoquen un cambio de estrategia estable respecto de las variables de las situaciones de tal manera que haga que fracasen las estrategias espontaneas.

**Referencias bibliográficas:**

**Boss, H.** (1973). Differentials, Higher - Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact Sci.* Vol. 14, 1-90.

**Cantoral, R.** (1997). *Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Seminario de investigación del Área de Educación Superior. Cinvestav - IPN. México.

**González, R** (1998). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría (en preparación), Cinvestav-IPN, México D. F.

## Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial.

*Rosa María Farfán M. y Javier Lezama A.*[2]
*Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.*

En este reporte mostramos los resultados de la puesta en escena de una ingeniería didáctica, en tres escenarios distintos con el propósito de investigar el fenómeno de reprodicibilidad de situaciones de aprendizaje.

*El hecho de repetir las mismas situaciones de aprendizaje en escenarios distintos, provoca de manera natural la pregunta ¿qué es lo que realmente se reproduce?*

*Un profesor que reproduce la misma historia, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo hecho didáctico que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?" (Brousseau, 1993).*

además declara

*"Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable" (Brousseau, 1993).*

Son las dos preguntas expuestas arriba las que nos permiten en principio identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como *reproducibilidad.*

Nuestro problema de investigación consiste en mostrar el papel que juegan en el ejercicio de reproducir la situación didáctica correspondiente a una Ingeniería Didáctica cuyo funcionamiento ya se conoce al haberse puesto en escena en grupo de estudiantes de bachillerato y en la que se hizo el correspondiente análisis a posteriori de los resultados obtenidos confirmándose las predicciones establecidas, el *análisis a priori, la estructura de la situación didáctica propuesta,* (Aguilar P., 1997). *La actividad de los estudiantes, la actividad desarrollada por los profesores, el trabajo en equipo, las interacciones equipo – profesor, las discusiones grupales.*

**Metodología de investigación.**

Se construye una metodología de investigación que consiste en los siguientes pasos:

1. Puesta en escena de la ingeniería "Un estudio de la función $2^x$ " en tres grupos, instituciones y niveles distintos.

Se seleccionan tres equipos de profesores con base a su interés en trabajar los temas del precálculo. Que se encuentran insertos tanto en el bachillerato como en el nivel superior y tenían disponibilidad y la posibilidad geográfica de trabajar en equipo.

Se planean las puestas en escena intentando repetir las condiciones reales de clase, en la que en cada grupo participen por lo menos 3 equipos, donde estén sujetos a un horario fijo de trabajo.

**Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología; Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado, Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional: 26345-S**

[2] Becario de Conacyt

A los estudiantes se les hace una invitación abierta, participando ellos voluntariamente, fuera de sus horarios habituales de clase.

2. Desarrollando un método de observación participativa, que intenta retener la dinámica del grupo en el desarrollo de la actividad.

La observación participativa consistía en el doble papel de observador – profesor informándoles a los estudiantes de que se tomarían apuntes de lo que ellos discutieran e hicieran y de que era factible que le hicieran consultas.

Para lograr tal propósito se crearon guías de observación enfocadas a la actividad de:

*Los equipos:* En las que se intentaría recoger la discusión matemática de los estudiantes y la dinámica del equipo, su avance en el sentido de la secuencia, y las discusiones de interés.

A la identificación de los obstáculos y desviaciones de los estudiantes en el desarrollo de la actividad: *Las guías le señalarían al profesor los posibles puntos de conflicto para los estudiantes al momento de resolver la secuencia, y que constituirían focos de atención para él con el fin de observar como los afrontaban y resolvían.*

*A la interacción del profesor con los estudiantes en las actividades de centración y desbloqueo:* El profesor tenía la responsabilidad de intervenir en caso de que un equipo desviara la discusión en un determinado punto de la secuencia alejándose del sentido de la misma, o bien al llegar a dicho punto éste se tornara en insuperable impidiéndoles avanzar. Estas intervenciones serían registradas pues permitirían establecer la dependencia del logro de los estudiantes de la intervención del profesor.

*A las actividades de institucionalización.* Esta actividad permitiría establecer el logro del grupo, por la profundidad de la discusión grupal, la participación de los estudiantes, la manera de justificar sus afirmaciones y las intervenciones de profesor. Toda esta actividad sería registrada por medio de una filmación y por escrito.

3. Análisis a posteriori de la ingeniería, estableciendo explícitamente su relación con la actividad de los profesores, los equipos y las discusiones grupales.

La secuencia se desarrolló en tres distintos escenarios trabajándola once equipos (35 estudiantes) distribuidos de la siguiente manera.

Grupo Oaxaca: Equipos 1,2,3, y 4; cada uno de ellos con 3 estudiantes.

Grupo Toluca: Equipos 5,6 y 7 cada uno de ellos con 3 estudiantes.

Grupo Pachuca: Equipos 8,9,10 con tres estudiantes cada uno y el 11 con dos estudiantes.

El grupo de Oaxaca estuvo constituido por estudiantes de nivel superior, de las carreras de Ingeniería Civil e Informática.

Los grupos de Toluca y Pachuca lo conformaron estudiantes de nivel medio superior (bachillerato), de escuela particular en el caso de Toluca y de distintas escuelas del sistema oficial en Pachuca.

*Elementos para identificar lo que se reprodujo en las distintas puestas en escena:.*

En la siguiente tabla se muestra cuál fue el avance de los equipos en términos del total de actividades a resolver, cuál fue la intervención del profesor en términos del avance del equipo y cuáles fueron aquellos aspectos que desde nuestro punto de vista fueron discutidos con suficiente profundidad, y en los que se refleja la mayor comprensión de la actividad.

| Equipos | Avance | | Intervención | | Aspectos discutidos significativos |
|---|---|---|---|---|---|
| | Razón | % | Razón | % | |
| E1 | 10/14 | 71 | 5/10 | 50 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento |
| E2 | 14/14 | 100 | 2/14 | 14 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$, $2^{1/4}$,$2^{3/4}$ y $2^{5/4}$<br>- Discuten la posibilidad de obtener $2^{1/8}$<br>- Se dan cuenta que se pueden calcular infinidad de valores de $2^x$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas.<br>- Afirman que todas las exponenciales se comportan de forma parecida. |
| E3 | 10/14 | 71 | 2/10 | 20 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento |
| E4 | 11/14 | 78 | 4/11 | 36 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas.<br>- Hacen un bosquejo de la función y consideran valores negativos de la función |
| E5 | 8/14 | 57 | 1/8 | 12 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$, $2^{1/4}$,$2^{3/4}$ y $2^{5/4}$; pero en forma equivocada, ello no les impide afirmar la naturaleza creciente de la función.<br>- Discuten ampliamente la ubicación de $2^{1/8}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. |
| E6 | 9/14 | 64 | 5/9 | 55 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenaron todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. |
| E7 | 10/14 | 71 | 8/10 | 80 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas.<br>- Se dan cuenta de cómo crece la función para valores muy grandes de la x. |
| E8 | 4/14 | 28 | 0/4 | 0 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$, $2^{1/4}$ y $2^{3/4}$ en forma equivocada, pero fue el equipo que sostuvo la más intensa discusión sobre la posibilidad de calcular números elevados a potencias fraccionarias. El cómo obtenerlos, y las características que tendrían. Sin embargo siempre dieron por un hecho la naturaleza creciente de la función.<br>- Llenan todas las tablas, las compararon pero nuevamente se detuvieron en la discusión de los números con potencias. |

| Equipos | Avance | | Intervención | | Aspectos discutidos significativos |
|---|---|---|---|---|---|
| | Razón | % | Razón | % | |
| E9 | 6/14 | 42 | 0/6 | 0 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen el segmento $2^{1/2}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. |
| E10 | 7/14 | 50 | 2/7 | 28 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.<br>- Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. |
| E11 | 8/14 | 57 | 6/8 | 75 | - Ubican las potencias enteras.<br>- Obtienen el segmento $2^{1/2}$.<br>- Llenaron todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. |

*En relación al análisis a priori*: Los profesores conocían con profundidad la ingeniería y la secuencia didáctica correspondiente. Habían realizado una exploración previa con los estudiantes, sin embargo, no ampliaron ni modificaron el análisis a priori de la ingeniería original, pero sí hicieron observaciones en relación a las dificultades que tendían los estudiantes con el manejo de los signos y el empleo de métodos geométricos.

No hicieron explícitamente ninguna observación en relación a lo inusual que es para los estudiantes a trabajar en equipo, redactar reportes de trabajo y efectuar discusiones grupales.

*En relación a la estructura de la situación didáctica*: Es una sucesión de actividades que no provoca grandes desviaciones, permite que todos los estudiantes pasen por los mismos problemas, y si proporciona la oportunidad de explorar distintas formas para afrontarlos así como de argumentación para justificar los resultados

*En relación a los estudiantes*: La actividad si exige una participación activa del estudiante y el conocimiento de ciertos procedimientos geométricos elementales o bien la adquisición de ellos sobre la marcha.

*En relación al profesor*: Este juega un papel fundamental, pues es él quién prepara la puesta en escena de la secuencia y conoce los propósitos didácticos de la misma. Conoce los problemas matemáticos que encierra la actividad y que enfrentará el estudiante y puede identificar cuándo los estudiantes estás explorando los aspectos matemáticos que propone la ingeniería. Tiene el control de tiempo y la libertad de interactuar con el estudiante para permitirle avanzar en términos de los propósitos de la ingeniería.

*En relación al trabajo en equipo*: En este caso les permite a los estudiantes, compartir la responsabilidad de avanzar en la secuencia, poder compartir sus dudad, preguntar a sus compañeros, argumentar para convencerlos de sus afirmaciones. Ante la dificultad de poder hacer un seguimiento individual de los estudiantes se observa al equipo, y el logro del mismo se interpreta como el logro de los estudiantes que componen dicho equipo.

*En relación de la interacción equipo-profesor*: En todos los equipos fue importante, la actividad sin los profesores hubiera sido en la mayoría de los casos muy distinta.

*En relación a las discusiones grupales*: Estas discusiones les permitieron a los grupos más atrasados nivelarse resolver sus dudas y en términos de esta discusión establecer el avance del grupo. Esta actividad permite la difusión de los resultados.

## Conclusiones

- La estructura de la situación didáctica permitió a los estudiantes llegar a la discusión de los puntos centrales de la ingeniería, como son la ruptura de la idea que $2^x$ tiene sentido únicamente cuando $x$ es entero y explorar la naturaleza creciente de $2^x$. Esto se puede interpretar como in indicio de reproducibilidad externa. Los estudiantes en su mayoría discuten casi todas las actividades de la secuencia.
- La reproducibilidad externa se produce en términos del mayor avance que logran los estudiantes en las actividades de la secuencia didáctica.
- La reproducibilidad interna la podemos identificar en aquellos aspectos significativos discutidos por la mayoría de los estudiantes con mayor profundidad, como pueden ser el contrastar la dificultad para ubicar los puntos con potencias enteras y con potencias fraccionarias, el empleo de los algoritmos geométricos para ubicar los puntos con exponente fraccionario. La identificación de la razón de crecimiento en el llenado de las tablas. Aún habiendo tenido esos elementos en común el nivel de profundización fue distinto, en relación a la manera como cada equipo se convenció y aceptó sus resultados fue distinto.
- Este ejercicio mostró que la reproducibilidad interna no depende estrictamente de la reproducibilidad externa, como lo permite ver el equipo **E8**, quién respondió en forma equivocada la primera etapa, pero tuvo una extraordinaria discusión sobre la naturaleza de los números elevados a potencias fraccionarias, y generó una estrategia para aproximarlos.
- En todos los casos la participación del profesor fue importante y determinó el desempeño del equipo. La participación moderada, dependió de la independencias de los equipos para trabajar la secuencia.
- En el caso en que la participación de profesor fue baja, propició desviaciones importantes en la estrategia de resolución de la secuencia, llevándolos a soluciones equivocadas, pero no afecto el nivel de discusión de los estudiantes.
- Un alta intervención del profesor no garantiza la reproducibilidad interna y externa.

## Referencias Bibliográficas:

**Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. Moreno, J.** (1997). Un estudio didáctico de la función $2^x$. *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Morelia, Michoacán, México.

**Artigue, M.** (1984). Contributions à l'étudede la reproductibilité des situations didactiques –Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques. *These de Doctorat d'etat. Univessite* Paris VII. Sin publicar.

# SITUACIONES DIDÁCTICAS DE LA DELTA DE DIRAC

*Patricia Camarena Gallardo*
*Rosa María Farfán Márquez*
*Instituto Politécnico Nacional, México*
*Cinvestav-Ipn, México*

## Introducción.

En el presente trabajo, se ofrece el diseño de situaciones didácticas que tienen como objetivo el que los estudiantes se apropien de saber, en este caso se aborda el concepto de la Delta de Dirac. Como se ha mencionado en diversos trabajos sobre la función Delta de Dirac, ésta es una función conflictiva para el alumno desde la definición misma, ya que se define como:

$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$ y además $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$. Es decir, contradice los conocimientos previamente establecidos en el joven, creando confusión en él.

Para abordar esta problemática, se ha llevado a cabo una investigación cuyo marco teórico está determinado por la Teoría de las Situaciones Didácticas, así como de la Transposición Didáctica, teorías que proporcionan una metodología a seguir, a saber: la Ingeniería Didáctica. Como es sabido, la Ingeniería Didáctica contempla tres fases, la primera: Diagnóstico; la segunda: Diseño de las situaciones didácticas; la tercera: Puesta en escena y análisis de resultados.

## 1.- Fase Diagnóstica.

La primera fase está formada por tres componentes: Didáctica, epistemológica y cognitiva. Cuyos resultados más relevantes para en diseño de las situaciones didácticas, se presentan a continuación.

### 1.1.- Componente Epistemológica.

En este punto se recurrió a los escritos originales en donde aparece la Función Delta de Dirac. Oliver Heaviside en los alrededores de 1890 y Gustav Robert Kirchhoff en 1891, introducen en sus trabajos funciones con valor cero en todos sus puntos excepto en uno de ellos, llamadas impulsivas, las cuales tomarán forma con los trabajos de Paul Maurice Dirac de 1936. Con Jan Mikusinski en 1959, poseerán una fundamentación teórica basada en la Teoría de Distribuciones de Schwartz, y con esto quedarán constituidas las Funciones Generalizadas. Para el diseño de las situaciones didácticas, es menester mencionar que la Delta de Dirac nace sin ser aceptada por el gremio de los científicos de la época, ya que Heaviside no poseía estátus dentro de la comunidad matemática y la definición que da: $pH(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t<0 \\ 0 \text{ para } t>0 \end{cases}$, en donde $p$H toma todos los valores desde cero hasta infinito en t=0, no es concebida como una función con la definición que se manejaba en ese entonces.

### 1.2.- Componente Didáctica.

La componente didáctica nos proporciona el análisis preliminar de la situación a abordar relativa al docente. Para ello se analizaron los programas de estudio de las carreras mencionadas en instituciones de educación superior, tanto públicas como privadas. En el análisis se detectó que ninguno de los programas de estudio del área de Matemáticas, contempla de forma explícita a las Funciones Generalizadas, ni específicamente a las funciones Delta de Dirac o Función de Heaviside. En algunos programas detallados se menciona el cálculo de la Transformada de Laplace de estas funciones, cuando se trata el tema de la Transformada de Laplace. En el caso del tema del Análisis de Fourier es más explícito el tratar la Transformada de Fourier de estas funciones. En ningún caso se abre un espacio para tratar a estas funciones. Se analizaron los textos más recomendados en la bibliografía de los programas de estudio de carreras de ingeniería en electrónica y ramas afines. Del estudio determinado en la componente epistemológica, se tiene que: con los trabajos de Heaviside y Dirac, quedan establecidas todas las operaciones y definiciones de las Funciones Generalizadas que son necesarias en ingeniería. Las variantes que se presentan posteriormente en los textos, tienen que ver con la forma de definir a la Delta, pues las propiedades son las mismas.

### 1.3.- Componente Cognitiva.

La componente cognitiva incide en la problemática desde el punto de vista del estudiante. Para esta componente se llevó a cabo un estudio acerca de los efectos de la enseñanza tradicional de las Funciones Generalizadas en las ingenierías, con lo cual se han detectado las concepciones que poseen los alumnos respecto a estas funciones. Se parte de las premisas siguientes: Las Funciones Generalizadas, en particular el caso de la función Delta de Dirac y la Función de Heaviside, son funciones no tradicionales. Los esquemas que poseen los estudiantes de su curso de Cálculo, no son consistentes con la definición que se les da acerca de la Delta de Dirac.

Las concepciones que poseen los estudiantes son: De manera natural tienden a trabajar a estas funciones, de forma análoga a como trabajan a las funciones tradicionales, tanto en el contexto algebraico como en el geométrico. No les es concebible el que la definición de la Delta de Dirac, conlleve una expresión junto con una condición. No les es concebible que dos funciones sean iguales cuando sus expresiones son diferentes.

### 2.- Diseño de las Situaciones Didácticas.

Tomando en cuenta el análisis preliminar, se elaboraron situaciones didácticas que contemplan dos tipos de secuencias didácticas. 2.1.- Con la primera se pretende "modificar concepciones". Las cuales se han detectado a través del estudio de la componente cognitiva, y se ha verificado que constituyen obstáculos para aceptar la Delta de Dirac, simplemente como una expresión con una condición, ya que no es una función en el sentido tradicional. 2.2.- Con la segunda secuencia, nuestro objetivo será el que el estudiante acepte a la Delta de Dirac como una expresión con una condición. Si la llegase a aceptar como una función, el logro sería mayor, ya que esto implicaría que está ampliando su concepción de función al incluir a las Funciones Generalizadas dentro de su mundo de funciones.

**2.1.- Las concepciones a modificar.**

a) Si una función se define como una expresión algebraica (dada a través de una o varias fórmulas) junto con una condición, entonces ya no es función. Se pretende que se den cuenta de que cuando una función se define a través de una expresión algebraica junto con una condición, ésta se puede graficar y en general se manipula y comporta como las funciones, por lo que entonces deberán ser una función.

b) Si las expresiones o formas de definirse de dos funciones son diferentes, entonces no son iguales.

***Observación.*** Cabe mencionar que las concepciones mencionadas, las poseen los estudiantes de los primeros semestres de las carreras de ingeniería, y resultan ser concepciones que no permiten la apropiación de la Delta de Dirac, ya que ésta requiere de estos conceptos para su definición y manejo.

En la primera secuencia, se les muestra a los estudiantes una colección de expresiones (funciones) las cuales para su definición requieren de una fórmula más una condición. Estas condiciones son de diferentes tipos, los cuales versan sobre continuidad de la función, condiciones en la integración de la función, sobre la periodicidad y condiciones para elegir miembros de una familia de funciones. También para que las puedan diferenciar, se les dan a los alumnos, funciones las cuales no requieren de condiciones para su definición. Así mismo, se les presentan funciones con condiciones y sin condiciones, las cuales en apariencia son diferentes pero se trata de la misma función. Es decir, se les presentan funciones que tienen diferentes expresiones para su definición, pero son la misma función. Véanse algunas secuencias.

**Actividad A.**

Hagan una representación gráfica de las siguientes expresiones para su posterior clasificación.

A.2.- $f_2(t) = \begin{cases} 4t+5, -2 < t \leq 0 \\ 5 \quad ,0 < t \leq 1 \end{cases}$ con $f_2(t+3) = f_2(t)$

A.5.- $f_5(t) = k\,t^3$ con $\int_{-1}^{0} f_5(t)dt = \frac{-5}{16}$

**Actividad B.**

B.1.- A partir de las expresiones de la actividad A y sus representaciones gráficas, discutan acerca de una clasificación en dos grandes grupos. La clasificación represéntenla en una tabla en donde se indique qué expresiones caen en un grupo y cuáles en el otro.

B.2.- Argumenten por escrito, qué tienen en común todas las expresiones de la actividad A.

B.3.- Argumenten por escrito, cuáles problemas de la actividad A son iguales y en qué sentido?

**2.2.- Introducción de la Delta de Dirac.**

En esta secuencia se les dan dos sucesiones diferentes de funciones, las cuales generan a la Delta de Dirac, y posteriormente se les presenta la Delta de Dirac, y se les pide que relaciones todas las expresiones, con el objetivo de que observen que todas son Deltas de Dirac, aunque se expresen de diferente forma.

**Actividad C.**

Hagan una representación gráfica de las siguientes expresiones y clasifíquenlas de acuerdo a la tabla de la actividad B.1.

C.1.- $g_1(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \le -a_1/2 \\ \dfrac{1}{a_1}, & -a_1/2 < t \le a_1/2 \\ 0, & a_1/2 < t < \infty \end{cases}$ con $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)dt = 1$

C.3.- $g_3(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \le -a_3/2 \\ \dfrac{1}{a_3}, & -a_3/2 < t \le a_3/2 \\ 0, & a_3/2 < t < \infty \end{cases}$ con $a_3 << a_2$ y $\int_{-\infty}^{\infty} g_3(t)dt = 1$

**Actividad E.**

Den la representación gráfica y clasifiquen de acuerdo a la tabla de la actividad B.1, a la expresión siguiente: f(t) = $\begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$ con $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

**Actividad F.**

¿Qué tienen en común las expresiones C.5, D.5 y la correspondiente a la actividad E?. Argumenten su respuesta.

**3.- Análisis de Resultados.**

De los reportes de las actividades, se tienen diferentes nomenclaturas para la clasificación solicitada, pero en el fondo se refieren a lo mismo cuando hablan de expresiones con condiciones.

Algunos términos utilizados por los alumnos: Directas, indirectas. Sin y con restricción. Sin y con condición. Etc.

Se esperaba que cuando se les preguntara por qué tienen en común, ellos respondieran que eran funciones. Pero resulta que siempre se refirieron a las expresiones como funciones, de forma tal que sus respuestas fueron las siguientes: Son objetos matemáticos, son gráficas, son entes matemáticos, todas dependen de una sola variable, etc.

En la segunda secuencia se mencionaron cosas de dos tipos: 1. Las g's tienden a un punto en infinito, mientras que las h's tienden a una recta en infinito, por lo que la función f de la actividad E, es igual a las dos anteriores y las tres son con condiciones. 2. Las g's y las h's tienden a infinito, por lo que la función f de la actividad E, es igual a las dos anteriores y las tres son con condiciones.

**Referencias Bibliográficas:**

**Camarena , P**. (1997). Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, *Memorias de la RELME-11*, (Farfán R. ed.) Editado por CLAME y Editorial Iberoamericana (en prensa)

**Cantoral, R** (1994). *Transposición Didáctica y Situaciones Didáctica*, Documento para el Seminario de Investigación en Ingeniería Didáctica.

**Farfán, R.** (1997), Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio, Grupo Editorial Iberoamérica.

# UN CASO COMPLEJO DE VARIACIÓN

*Ramón Flores Hernández*
*Universidad Autónoma de Coahuila, México*
*Ricardo Cantoral Uriza*
*Cinvestav - IPN, México*

## Introducción

El ejemplo que se presenta en esta ponencia involucra la variación y surge del proyecto de tesis de maestría de Flores (1998), titulado: "Sobre el Pensamiento Variacional: Una Exploración en Contexto". El contexto citado se refiere a la Resistencia de Materiales ( Mecánica de Materiales), observada en la carrera de Ingeniería Civil. El estudio se delimitó al tema "Flexión de Vigas" estáticamente determinadas, siendo nuestro objetivo de estudio: indagar, qué tanto, bajo las circunstancias de enseñanza tradicional, el estudiante de ingeniería civil se ha apropiado de un pensamiento variacional.

En esta ponencia estamos interesados, principalmente, en presentar un ejemplo de variación, ubicado en la ingeniería: el de la flexión de vigas. En este fenómeno se evidencia la variación en el proceso mismo de predecir la deflexión de una viga, mediante leyes que rigen sus cambios sucesivos, a través de relaciones funcionales entre las variables involucradas en el fenómeno; más específicamente: al aplicar una carga a una viga, ésta pasa de un estado inicial identificado con la posición horizontal del eje neutro, a un estado final estable identificado mediante la transformación que sufre en el proceso de movimiento continuo dicho eje, cambiando a ser la curva elástica a través de la variación de las variables involucradas en su deformación; es decir: la carga, el cortante, el momento, la pendiente y la deflexión.

## Aspecto Epistemológico

Un estudio epistemológico sobre el tema, permitió localizar una variación primaria. Galileo (1567-1672) inicia el estudio de la flexión de vigas, observando que, bajo la aplicación de una carga, existe un comportamiento interno de la viga a la par del comportamiento externo. En cuanto al comportamiento interno, supone la existencia de fuerzas internas (esfuerzos) distribuidas uniformemente, es decir, supone que hay una acción interna invariable (¡incorrecto!).

Esto muestra un primer acercamiento a la variación, a través del cambio que sufre la viga por la aplicación de una carga. La variable involucrada es las fuerzas internas; sin embargo, Galileo no localiza su variación, ya que no logra identificar su cambio, al considerarlas, como se dijo antes, uniformemente distribuidas.

Mas tarde entra a la escena Robert Hooke (1635-1703), quien no sólo discute la deflexión de una viga, sino también considera las deformaciones de las fibras longitudinales y hace la importante declaración que las fibras sobre el lado convexo son extendidas durante la flexión y las fibras sobre el lado cóncavo son comprimidas.

La estimación que da Hooke, también la hacen otros científicos de la época, tales como los franceses: Mariotte (1620-1684), Parent (1666-1716) y Coulomb (1736-1806). Sin embargo, tenemos la creencia que Hooke fue el primer científico que tuvo más clara la noción de variación en este fenómeno, es decir, creemos que poseía un pensamiento variacional. Para lo cual nos apoyamos en los hechos de que: publicó el primer artículo ("De Potentia Restitutiva" ) donde las propiedades elásticas de los materiales son discutidas, además, establece la relación entre la magnitud de las fuerzas y las deformaciones que ellas producen; es decir, la ley de Hooke. Esta ley es una de las herramientas que permite medir el cambio que sufre la viga bajo la acción de cargas, y por tanto, es un modo de interpretar la variación, es decir, en esta ley está intrínseca la variación.

En síntesis, un primer contacto con la variación en este fenómeno, se tiene en la consideración de la distribución de los esfuerzos internos. En consecuencia, este conflicto conduce a la construcción de la noción de eje neutro y posteriormente a su localización correcta en la viga, y por tanto, da pie al inicio del estudio de la deformación que sufre dicho eje bajo la aplicación de cargas, derivandose así, la curva de las deflexiones; es decir, la curva elástica. Todo esto significa que la noción de eje neutro conllevó a la matematización del fenómeno.

**El Ejemplo**

La flexión de vigas, consideramos, es un caso complejo de variación; donde hay que poner en funcionamiento un pensamiento variacional, digamos, avanzado. A diferencia, por ejemplo, donde se utiliza la razón promedio de cambio $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ o la razón instantánea de cambio $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cuantificar fenómenos de variación. De hecho, esta última razón es el instrumento natural de cuantificación de la variación. Ambas razones las podemos utilizar en problemas como el siguiente:

Si la curva elástica de una viga está dada por la función:

$f(x)=-\dfrac{x^4}{12EI}+\dfrac{x^3}{EI}-\dfrac{9x^2}{2EI}$, $0\le x\le 3$. Encuentre la deflexión promedio en $[2,2.8]$. Así mismo, la pendiente de la elástica en x=3.

Digamos que ésta es una situación de variación natural.

Un caso diferente y de una complejidad mayor, surge cuando se pretende predecir la curva elástica de una viga (en comparación con el ejemplo anterior, sería encontrar la función dada), es decir, el estado final del cambio al variar la carga aplicada, y en consecuencia el cortante y el momento. Esto se evidencia visualmente a través de diagramas secuenciales y representativos de la variación de estas variables, elaborados con base en los significados intrínsecos de las ecuaciones diferenciales: $\frac{dv}{dx}=q(x), \frac{dM}{dx}=v(x)$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$, deducidas de examinar el comportamiento que tiene una viga bajo carga y en cuyo proceso están involucrados fuertemente, la argumentación y la justificación. Así pues, la representación visual de estas ecuaciones viene a través de sus significados evidenciándolos al leerlas de izquierda a derecha y viceversa, implicando esto, la derivación e integración gráfica, respectivamente:

$$\frac{dv}{dx}=q(x) \qquad \frac{dM}{dx}=v(x) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

$\xrightarrow{\text{D}}$ $m_s$ =altura $\quad$ $\xleftarrow{\text{I}}$ $\quad$ $\xleftarrow{\text{I}}$ concavidad = alturas

$\xleftarrow{\text{I}}$ $m_s$ =alturas

Por ejemplo, si leemos la ecuación $\frac{dv}{dx}=q(x)$ de derecha a izquierda, será con el fin de encontrar "v" teniendo como dato a "q". Aquí q(x) representa las alturas de "q", las que se transforman en pendientes de las tangentes a la curva "v" bajo este proceso de integración, dando como resultado la función "v". O si la leemos de izquierda a derecha será con el fin de encontrar "q" conociendo "v", en donde dv/dx representa las pendientes de las tangentes en cualquier punto de "v" transformándose en las alturas "q(x)" bajo este proceso de derivación. Por último, la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$ leyéndola de derecha a izquierda significa que se conoce "M" y se pretende conocer "y"; M(x) representa las alturas de "M", transformándose en concavidades para la función "y" bajo este proceso de integración.

Complementando esta descripción podemos decir que, para una buena realización de los diagramas, es necesario valerse también de los significados físicos del fenómeno. Así mismo, en este ejemplo de variación es necesario mirar las ecuaciones diferenciales de derecha a izquierda, para la elaboración secuencial de los diagramas representativos de las variables del fenómeno. La parte simbólica de cada diagrama, es decir, las ecuaciones representativas de las variables pueden ser obtenidas, también, de los significados de estas ecuaciones diferenciales.

**Conclusión**

El efecto que tiene el estudio del fenómeno de la flexión de vigas en el estudiante, desde una perspectiva cognitiva, es significativo, pues implica poner en funcionamiento un pensamiento variacional de una complejidad mayor. Evidenciándolo al manejar los significados intrínsecos de las ecuaciones diferenciales mencionadas, con el fin de obtener la elástica, y por otro lado, al deducirlas: empleando la argumentación y la justificación. Debido a esto, pudiera hablarse de un pensamiento variacional avanzado.

En cuanto al aspecto didáctico, podemos decir que: en el discurso que usa el profesor, se pierde el proceso variacional, pues se deriva de otro, carente de este proceso basado significativamente en la estática, donde no se dice cómo cambia lo que cambia, pues deja de lado el cálculo como instrumento de predicción. Tal discurso es un ejemplo de la transposición didáctica que hace el profesor de la flexión de vigas, al cambiar radicalmente su exposición, limpiándola de las ideas del cálculo o haciendo a un lado los métodos que lo involucran, significando que hay una falta de explicitación clara de la variación; sin embargo, el hacerlo no es nada fácil, o cuando menos no lo tenemos claro, por lo cual nos induce a plantear la siguiente interrogante: ¿cómo podemos enseñar los fenómenos físicos teniendo como eje de acción la variación? Creemos que la respuesta a esta pregunta es un paso importante para que el estudiante se apropie de un pensamiento variacional avanzado.

**Referencias bibliográficas:**

**Cantoral, R.** (1993). Hacia una Didáctica del Cálculo Basada en la Cognición. *Mem. Centroam. Y Caribe Form. Prof. e Inv. En Mat. Educ.* **7** (1) (pp. 397-410).

**De Vega, M.** (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. México: Alianza Editorial Mexicana.

**Fitzgerald, R.** (1970). *Resistencia de Materiales*. México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.

**Flores, R.** (1998). *Sobre el Pensamiento Variacional: Una Exploración en Contexto*. CINVESTAV del IPN (Tesis de Maestría en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa).

**Galileo.** (1987). *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre Dos Nuevas Ciencias*. Madrid: De. Nacional. (Galileo. *Two New Sciences*. New York: The Mac Millan Company 1993).

**Timoshenko, S.** (1993). *History of Strength of Materials*. New York: Dover Pubications.

# Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales

*Miguel Solís Esquinca y Francisco Cordero Osorio*
*Universidad Autónoma de Chiapas, Cinvestav IPN, México*
*solis@montebello.unach.mx; fcordero@mail.cinvestav.mx*

## Resumen

Estudiantes universitarios se enfrentaron a situaciones matemáticas que involucraban ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $y + y'(x) = F(x)$. Dadas las soluciones, gráficas y analíticas, se esperaba que pudieran establecer relaciones entre la ecuación y su solución. Mediante entrevistas clínicas individuales y colectivas recogimos y analizamos la información sobre de sus estrategias. Éstos pudieron reconocer patrones algebraicos y comportamientos gráficos que relacionan la ecuación con su solución. En marco funcional son las habilidades de los estudiantes para modelar y simular circunstancias que involucran ecuaciones diferenciales las que se favorecen por la situación.

## Introducción

Este reporte se ubica dentro de un proyecto de investigación cuyo objetivo es estudiar el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de observar actos visuales y actos analíticos que se presentan en las estrategias de los estudiantes al abordar un problema. Generalidades de este proyecto se han ya presentado en Relme 11 [Solís y Cordero 1998], por lo que el presente podría considerarse una continuación de aquel. Ofrecemos en esta ocasión resultados preliminares que obtuvimos a través de un primer análisis de entrevistas clínicas aplicadas a diez estudiantes universitarios.

## Marco Teórico

Trabajamos dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales que está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Esta perspectiva se centra en los invariantes en la construcción del conocimiento matemático: acciones, procesos, objetos y esquemas [Asiala et. al. 1996]. Los elementos tomados de esta perspectiva están, en nuestro trabajo, enfocados a la evolución adaptativa del conocimiento ante una situación. En este sentido, son los progresos y restricciones de esos invariantes los que importa atender. Encontramos en el ámbito escolar un argumento en las gráficas de las funciones que por su naturaleza le hemos llamado comportamiento tendencial. Éste tiene un *statu quo* espistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del Cálculo que tiene que ver con la construcción de un marco funcional en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados [Cordero 1997].

## Metodología General del Proyecto

La metodología consiste en los siguientes pasos:

1. Transformar un hecho a un fenómeno didáctico. En nuestro caso, el hecho consiste en las dificultades que tienen los estudiantes para interactuar (ir y venir) entre los contextos gráficos y algebraico. Este hecho

ha sido ubicado en el fenómeno de las representaciones [Vergnaud, 1990] y transformado en el fenómeno didáctico, el cual toma en cuenta las diferentes representaciones, sus formas y niveles, los diferentes planos de representación y los posibles homomorfismos entre ellos. Y las coherencias locales de procedimientos operativos que son derivados de esas representaciones.

2. Describir las dificultades específicas de las situaciones de enseñanza. Tomamos en cuenta la descontextualización y recontextualización que conlleva a la rehabilitación de significados y sistemas simbólicos, donde descontextualización significa que el contexto original fue perdido y recontextualización significa la búsqueda de un contexto tal vez distinto al original.
3. Establecer un marco teórico que explique las dificultades. El marco, hasta ahora, se compone de los siguientes elementos: abstracción reflexiva y categorías del conocimiento matemático; acciones, procesos, objetos y esquemas; representaciones y procedimientos; niveles de desarrollo.
4. Usar el marco teórico para diseñar situaciones didácticas. Se diseñan situaciones sobre una base socio-epistemológica.
5. Considerar los resultados de 3 y 4 en la implementación e iteración. Las actividades de las entrevistas para cada situación serán diseñadas e implementadas en concordancia con la metodología.

**Descripción de la Experiencia**

Diez estudiantes se enfrentaron a las situaciones diseñadas, cinco entrevistas individuales se llevaron a cabo con cinco de cada uno de ellos, una entrevista grupal se llevó a cabo con un grupo formado por los cinco restantes. Tres entrevistadores tomaron parte en la experiencia.

Para las entrevistas se dispuso de un espació físico permanente (un aula acondicionada) en una institución de educación superior de México. Más de una cámara de vídeo, generalmente dos, filmaron la entrevista, además, la entrevista fue audiograbada por más de una grabadora. Las entrevistas individuales tuvieron una duración de aproximadamente una hora mientras que la entrevista grupal duró una hora y media.

**Las Situaciones**

El protocolo de la entrevista individual consistía de tres partes: en la primera se le pedía al estudiante que bosquejara la gráfica de una parábola y luego contestaba preguntas acerca de las operaciones sobre los coeficientes y su relación con los efectos en la gráfica (cambio de pendiente, traslación), la intención de esta parte era que el estudiante se familiarizara con una "aritmética gráfica"; en la segunda parte de la entrevista, se presentaba la ecuación diferencial $y' + y = 0$ y se preguntaba sobre su solución, algebraica y gráfica, lo mismo para la ecuación $y' + y = F(x)$ cuando $F(x) = k$,

$F(x)=x$ y $F(x)=x^2$; en la tercera parte se trabajó la generalización $F(x)=x^n$.

Para la entrevista colectiva la situación consistió en lo siguiente: primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraba cuatro ecuaciones las cuatro ecuaciones diferenciales del párrafo anterior, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas. La última parte de la situación también se preguntaba por la ecuación $y'+y=x^n$.

**Resultados**

Las situaciones matemáticas nos dieron información acerca de las estrategias de los estudiantes. Éstas, así como contenidos matemáticos involucrados, significados, procedimientos y nociones estuvieron determinadas por la situación. Además de proporcionarnos información acerca de la actuación del estudiante ante la situación, éste construyó conocimiento matemático que está estrechamente relacionado con la situación a la que se ha enfrentado. Situados en un marco funcional, esto es, estableciendo relaciones entre los procesos y objetos a través de significados, el estudiante más que adquirir conceptos matemáticos a través de sus definiciones, éste aprendió a identificar coeficientes en las funciones, reconocer patrones de comportamiento gráfico y algebraicos, buscar tendencias en los comportamientos y establecer relaciones entre funciones

Particularmente trabajamos con el contenido matemático de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes. No son los métodos de solución los que están en juego aquí, aunque los estudiantes, en la entrevista, pudieron resolver un caso particular de este tipo de ecuación; son mas bien las relaciones entre que se pudieran establecer entre la ecuación y su solución (gráfica y analítica) en lo que estuvimos interesados. El referente escolar es que son las habilidades de los estudiantes a simular y modelar situaciones (reales o escolares) que involucren ecuaciones diferenciales las que están siendo favorecidas. En cuanto al referente matemático escolar la situación tienen que ver con los conceptos involucrados en el Teorema de Estabilidad de la Ecuaciones Diferenciales. La situación involucra las nociones de variación de la variable, variación de los coeficientes, comportamientos gráficos en general, asintóticos en particular, reconocimiento de patrones, relaciones entre gráficas, relaciones entre gráfica y expresión analítica y viceversa y relaciones entre la primitiva y derivada entre otras. Por otro lado involucra los conceptos de gráfica de una función, transformación de funciones, pendiente de una curva, derivada, derivadas sucesivas, operaciones con funciones (gráfica y algebraicamente), límite de una función (cuando la variable tiende a infinito), asíntota de una función (no la vertical)

**1 Estrategias observadas**

a) Estrategias de tipo local. Los estudiantes suman ordenadas, evalúan las funciones en un punto para graficar. En este tipo de estrategia el estudiante tuvo que repetir sus procedimientos cuando se enfrenta a la situación (suma varias ordenadas, evalúa en varios puntos.

b) Estrategias de tipo global. Los estudiantes reconocen comportamientos de las gráficas. La variación de los coeficientes y su efecto de trasladar y cambiar la pendiente de la gráfica afectada entra en este tipo de estrategias. Estas estrategias involucran aspectos cualitativos de las gráficas, el estudiante encuentra dificultades en diferenciar dos gráficas con comportamientos similares.

c) Síntesis de estrategias. Encontramos también estrategias combinadas, esto es, al enfrentarse a una situación el estudiante recurre por momentos a ambos tipos de estrategias.

**2. Reconocimientos de patrones.**

a) Ecuación ↔ Expresión Algebraica de la Solución. Los estudiantes reconocen el término F(x) de la ecuación como parte fundamental de la solución. En esta situación intenta comprobar (sustituyendo en la ecuación la solución) sus conjeturas, favorece la dirección de ir de la solución a la ecuación. Los procedimientos analíticos de derivar y sumar permitieron reconocer los términos de la solución en términos de las derivadas sucesivas del término F.

b) Ecuación ↔ Gráfica de la Solución. Los estudiantes reconocen la gráfica de la solución a partir de observar los comportamientos gráficos de la solución y relacionarlo con el comportamiento gráfico del término F(x). Si el estudiante, en el registro geométrico, no atiende los comportamientos gráficos puede establecer esta relación.

c) Ecuación ↔ Gráfica de la Solución ↔ Expresión Algebraica de la solución ↔ Ecuación. Ante esta situación los estudiantes establecen una dirección que va de la ecuación a la solución algebraica y luego a la gráfica de ésta.

**3. Operaciones gráficas.**

a) Traslación y cambio de pendiente de una curva prototipo. Operando una sola función a partir de la variación de los coeficientes, los estudiantes identifican los efectos en la gráfica.

b) Operaciones binarias entre gráficas. Comparación de gráficas, suma de gráficas. El estudiante describe la gráfica de una función en referencia a otra, obtiene la gráfica de una función a través de las gráficas de los sumandos. Reconocen una gráfica la como compuesta por al menos dos funciones (por medio de la suma de éstas, por ejemplo)

## Comentarios Finales

El presente es un primer análisis que nos arroja algunos resultados preliminares, un análisis más profundo se está llevando a cabo con las mismas entrevistas, en ellas estaremos dando cuenta de los actos visuales y analíticos que intervienen en la solución de un problema matemático. Como consecuencia de este primer análisis se están diseñando nuevas situaciones que nos den respuesta a nuevas interrogantes del problema de investigación.

### Referencias bibliográficas:

**Asiala, M., Brown A., DeVries, D, Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K.** (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education. II* (6), 1-32.

**Cordero, F. & Solís, M.** (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. *Cuadernos Didácticos No. 2.* Segunda Edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica

**Solís, M. & Cordero, F.** (1998). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán Ed. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Pp 69-73. Bogotá, Colombia: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica.

**Cordero, F**. (1997). El comportamiento tendencial como una categoría de conocimiento del cálculo. *Publicaciones del Area de Educación Superior. Serie: Antologías No. 2.* Cinvestav IPN.

# Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos

*Germán Muñoz Ortega y Francisco Cordero Osorio.*
*Departamento de Matemática Educativa.*
*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Conacyt.*
*gmunoz@mail.cinvestav.mx*

## Introducción

El proyecto de investigación trata de encontrar elementos que propicien el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral.

La problemática que abordamos consiste en una separación entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del cálculo integral, es decir, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de la ejercitación y de una manera separada de la parte conceptual; es hasta que se abordan las llamadas *aplicaciones* cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a la integración. Sin embargo, en algunos casos, se reduce la parte conceptual a la definición de integral de Cauchy-Riemann; no obstante, se realiza el cálculo de la integral con el teorema fundamental del cálculo. Además, los tiempos dedicados a la enseñanza de cada parte son diferentes. Por ejemplo, en nuestro sistema educativo se llega a utilizar casi la totalidad de un semestre escolar para la ejercitación del cálculo de primitivas, y sólo en lo que resta del semestre se abordan algunas "aplicaciones".

Identificamos una condición necesaria para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, que consiste en tener un problema específico por resolver que permita pensar en la integración, para hallar la solución.

De manera que, identificamos el tipo de problemas que permiten pensar en la integración; realizamos un análisis de las diversas situaciones y se caracterizaron las clases de problemas (ver Muñoz, 1996).

Así, nuestro problema de investigación consiste en entender cuáles son los mecanismos cognoscitivos que operan en la relación entre lo conceptual y lo algorítmico cuando los estudiantes son enfrentados a las situaciones de ese tipo de problemas.

Por las características de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los Campos Conceptuales, la cual nos permitió tener referentes para el análisis y la clasificación de las diversas situaciones problema que permiten pensar en la integración.

En esta ponencia abordamos aspectos de uno de nuestros objetivos principales: *identificar los mecanismos cognitivos que operan en la relación entre lo conceptual y lo algorítmico cuando los estudiantes se enfrentan ante diferentes situaciones que permiten pensar en la integración.*

Para estudiar dichos mecanismos nos auxiliamos de la Epistemología Genética y en particular de dos mecanismos de conjunto: el pasaje del *intra* al *inter*, y de allí al *trans*, por un lado y, por otro, el mecanismo general de equilibración (Piaget y García, 1994). Debido a que, después de analizar las diversas situaciones problema, pensamos que es necesario explicar los mecanismos cognitivos, para posiblemente lograr coordinar el desarrollo de lo conceptual y lo algorítmico con las situaciones y los mecanismos cognitivos.

Es necesario aclarar que nuestras reflexiones finales se ubicarán en el contexto del rediseño del discurso matemático escolar. La teoría de los campos conceptuales y los mecanismos de conjunto son simplemente auxiliares que nos permitirán estudiar diversos aspectos de la problemática.

**Metodología.**

Diseño de las situaciones específicas a tratar con los estudiantes, es decir, el diseño de las actividades específicas que se llevarán a cabo con un estudiante o con un grupo de estudiantes. Estas actividades serán diseñadas con base en el análisis de las situaciones y para cumplir con el objetivo planteado.

Se usará el método de entrevista clínica que desarrolló Piaget. Y que según el punto de vista de Vergnaud (1981) es un método esencial para el análisis de las dificultades conceptuales y para el análisis de los procedimientos a través de los cuales los alumnos tratan una situación dada. Se realizarán varias sesiones con los mismos estudiantes.

Primero se realizará un diseño inicial de actividades para su implementación y la consecuente colección de información.

Después se analizará la información y con base en dicho análisis se revisarán las actividades iniciales para su reformulación.

Una vez que se rediseñen las actividades se vuelve a experimentar. Y la iteración continuará hasta alcanzar los objetivos planeados en el proyecto (para cada iteración no necesariamente se trabajará con los mismos estudiantes).

**Diseño de la secuencia de situaciones**

Para realizar la investigación empírica diseñamos una secuencia de Situaciones con base en todo lo anterior y en el contexto de la Cinemática. Por ejemplo:

**Situación 1**

De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información:

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,.................................(segundos)

V/ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,.1,.......................(metro/segundo)

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,.................................(segundos)

S/ 2, (metros)

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos.

b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo que se elija.
c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos).

**Situación 2**

De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información:

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,................................(segundos)
V/ 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,.........................(metro/segundo)

t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,................................(segundos)
S/ 2, (metros)

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos.
b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo que se elija.
c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos).

En la investigación empírica planteamos algunas hipótesis: *a)* Si podemos caracterizar lo que puede hacer el estudiante cuando está instalado en una situación de movimiento uniforme, entonces cuando el estudiante empiece a interactuar con una situación de movimiento no uniforme tendrá algunos conflictos cognitivos (desequilibrios)[3] *b)* Al intentar instalar a un estudiante, o, a un grupo de estudiantes en el marco epistémico de Newton (cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos): ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994), las nociones de ***predicción, acumulación y constantificación de lo variable*** van ha jugar un papel importante en la interacción del estudiante con la situación *c)* Debido a que la velocidad se proporciona de manera numérica, el estudiante posiblemente construya un procedimiento de suma para calcular lo que se le pide.

Los estudiantes entrevistados habían cursado segundo semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales, habían cursado la materia de Cálculo integral y sus edades eran entre 19 y 20 años. Después de realizar una transcripción de todo lo que ocurrió durante la entrevista clínica, hicimos un análisis en donde encontramos lo siguiente.

**Resultados de la investigación empírica**

**Para la Situación 1**

[3]El conocimiento pasaría de un estado a otro de equilibrio a través de un desequilibrio de transición. Esta fase de conflicto sería superada durante una fase de reorganización y de coordinación que llevaría a un nuevo estado de equilibrio.

a) El estudiante centra la atención en la *acumulación* de distancias a través de un procedimiento de suma (procedimiento no algorítmico[4] en este caso).
b) El estudiante puede *predecir* hasta que centra la atención en el origen del sistema de referencia a través de un procedimiento de suma (procedimiento algorítmico[5] en este caso).
c) El estudiante construye un algoritmo[6] a partir de su procedimiento algorítmico (*acumulación de distancias+posición inicial=posición final*).
d) Cuando la pregunta es sobre calcular la distancia desde el tiempo 6 hasta el tiempo 12 el estudiante acumula distancias a través de un procedimiento de suma (procedimiento algorítmico en este caso) pero sin usar la expresión algebraica previamente construida.

Al observar lo que puede hacer el estudiante en la *Situación 1* podemos caracterizar el estado de conocimiento de partida (relativo). Enseguida para pasar al siguiente estado de conocimiento el estudiante entra en conflicto[7] al interactuar con la *Situación 2* en donde la velocidad ya no es constante, y en sus intentos por salir del conflicto acude a la noción de *constantificación de lo variable* a través de un procedimiento de suma (procedimiento no algorítmico en este caso); en otro de sus intentos por salir del conflicto el estudiante construye una representación gráfica de lo que está ocurriendo con la relación entre las distancias y los tiempos en el movimiento. Tomando al movimiento uniforme como un estado de conocimiento de partida y al movimiento no uniforme como un estado de conocimiento posterior, estamos analizando el desarrollo psicogenético de la integración y su relación con el aprendizaje escolar.

## Referencias bibliográficas:


**Cantoral, R.** (1990). "Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas". *Tesis doctoral*, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.

**Cordero, F. (1994).** "Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar". *Tesis Doctoral*, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

**Muñoz, G.** (1996). "Algunos elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral". *Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, pp.109-114. Puerto Rico.


[4]Procedimiento que no conduce necesariamente a la solución del problema (Vergnaud, G., 1991. "El niño, las matemáticas, y la realidad". Ed. Trillas, México).
[5]Procedimiento que conduce necesariamente a la solución del problema (Vergnaud, 1991).
[6]No todo procedimiento algorítmico es un algoritmo, para que el nivel de algoritmo sea alcanzado es necesario que el procedimiento algorítmico se sitúe en el ámbito de las representaciones calculables (representación simbólica que se presta para realizar cálculos), según Vergnaud, (1991).
[7]En cierto modo se ha desequilibrado la estructura cognoscitiva del estudiante.

# Taller: analogía entre las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales ordinarias

*Juan Manuel Nole H.*
*Universidad de Panamá (CIMECNE) y*
*Secretaría Nacional de Ciencias, Tecnología e Innovación (SENACYT). Panamá.*

## Objetivos

1. Destacar las conexiones entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencias.
2. Conducir a los participantes en la adquisición de conocimientos de los rasgos esenciales de los dos tipos de ecuaciones que se comparan: <u>ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales, ambas lineales de primer y segundo orden, con coeficientes constantes.</u>
3. Comprender que la analogía entre las teorías de los dos tipos de ecuaciones señalados en el objetivo 2, es consecuencia de la analogía del cálculo diferencial y el cálculo en diferencias.

## Contenido

(1) Determinación de la primera y segunda diferencia de una función y: $\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$, $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta y(x + h) - \Delta y(x)$, donde $\Delta$ es el operador diferencia y h es el intervalo de diferencia.

(2) Demostración del teorema: Dadas dos funciones u y v se verifica que $\Delta[u(x)v(x)] = Eu(x) \,.\, \Delta v(x) + v(x) \,.\, \Delta u(x)$, donde E es un operador aplicado sobre funciones.

(3) Deducción de la fórmula para el cálculo de la diferencia de las funciones factoriales:

$\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$ $\quad n = 1, 2, 3,...$

(4) Deducción de la fórmula para el cálculo de la diferencia de un cociente de dos funciones u y v.

$$\Delta \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x)Ev(x)} \quad \text{siempre que } v(x)\, Ev(x) \neq 0$$

(5) Presentación de nociones de ecuaciones en diferencias y de cómo se llegan a resolverlas.

(6) Determinación de la ecuación $y_{k+1} = Ay_k + B$ $\quad, k = 0, 1, 2, ...$

(7) Demostración del Teorema: La función y dada por la ecuación

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B\dfrac{1-A^k}{1-A} & \text{si } A \neq 1 \quad k = 0, 1, 2,... \\ y_0 + B_k & \text{si } A = 1 \end{cases} \qquad \text{es}$$

la única solución a la ecuación en diferencias del contenido 6 para el valor $y_0$ dado.

(8) Prueba, de que la ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes es una aproximación de la ecuación diferencial correspondiente.

(9) Demostraciones de propiedades análogas para obtener soluciones particulares y la solución general de los tipos de ecuaciones que se comparan, en el caso de ecuaciones de la forma:

$y_{k+1} + ay_k = 0$ , $y' + ay = 0$, a es constante

$y_{k+2} + ay_{k+1} + by_k = 0$, $y'' + ay' + by = 0$, a y b son constantes.

**Metodología**

Este taller está organizado para realizarse en tres sesiones de clase, dirigido a participantes con un nivel superior y que tengan conocimientos de ecuaciones diferenciales ordinarias. En cada sesión de trabajo se hará una exposición central por parte del Profesor Expositor y se entregará una guía de trabajo con problemas a resolver. En la primera sesión de trabajo se desarrollarán los contenidos 1, 2, 3 y 4 y luego se trabajará sobre la GUÍA N° 1; en la segunda sesión, se abordarán los contenidos 5, 6, 7, 8 y después se resolverá la GUÍA N°2; y en la tercera sesión, se cubrirán el contenido 9 y la GUÍA N° 3.

**Requisitos**

Los interesados en participar en este taller deben revisar previamente sus conocimientos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, de primer y segundo orden con coeficientes constantes, en particular, los métodos de resolución de la ecuación reducida u homogénea de la ecuación completa de primer y segundo orden. Para la sustentación de este taller presentamos los siguientes antecedentes teóricos y metodológicos.

**Antecedentes teóricos**

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales.
2. Diferencias Finitas y Ecuaciones en Diferencias.

**Antecedentes metodológicos**

Utilización de analogías en el proceso didáctico de las ecuaciones en diferencias, después de haberse estudiado las ecuaciones diferenciales lineales.

**Observaciones de los participantes.**

1. La temática del taller es interesante, sin embargo el desarrollo se percibió algo rápido.
2. A pesar del corto tiempo de duración del taller y las limitaciones en cuanto al conocimiento de las ecuaciones en diferencias, se considera que ha sido de utilidad el mismo, debido a que se ha mostrado la analogía con las ecuaciones diferenciales con mucha claridad. Sería bueno que en otra ocasión se le brindara más tiempo para que el ponente pudiera adentrarse más a la temática y expusiera las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias.

3. En forma general estuvo bien. Estos conocimientos como en las ecuaciones diferenciales ordinarias, deben "aterrizar" en aplicaciones prácticas. Esto da lugar para preparar un nuevo taller donde se apliquen las ecuaciones en diferencias finitas a problemas "reales".
4. Excelente taller impartido por el Maestro Nole. En el futuro me permitirá empezar a estudiar las ecuaciones en diferencias que eran desconocidas para mí.
5. El seminario cumplió con las expectativas en términos generales, pero sería conveniente alargar el tiempo de duración del mismo ya que este fue factor de impresiones en el aprendizaje. La explicación fue excelente y los materiales bastante adecuados, sin embargo faltó contextualizar las aplicaciones a determinados campos específicos (Física, Biología, Economía, etc). El lugar fue inadecuado, ya que se necesitaron mesas de trabajo. Había que realizar trabajos cooperativos para promover desarrollo de habilidades.

**Referencias bibliográficas:**


**Boole, G**. (1960). *A Treatige of the Calculs of Finite Differences*. Dover Publications Inc. New York.

**Fernández, C. y Longamasino, E.** (1982). *Diferencias Finitas y Ecuaciones en Diferencias*. Editorial de la ENSPES, La Habana.

**Goldberg, S**. (1964). *Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Macombo, S.A. Barcelona.

**Spiegel, M**. (1989) *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. Editorial Prentice- Hall Hispanoamericana S. A. México.

**Spiegel, M**. (1971). *Finite Differences and Differences Equations*. Schaum Outline Series, Mc Graw - Hill Book Company U.S.A.

**Takehito, T**. (1991) *Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

# Pensamiento y Lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea

*Ricardo Cantoral Uriza*
*Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa.*
*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México*

## Resumen

En esta ponencia analizaremos los componentes de un programa de investigación en curso, un *programa de escuela* compuesto de una multitud de estudios parciales que están siendo actualmente desarrollados por diversos grupos de colegas en distintos sistemas escolares. A este programa colectivo de investigación le hemos denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLV) y con él pretendemos hacer explícitos los vínculos entre la investigación fundamental que busca explicar los mecanismos de la construcción social del conocimiento con la realidad del aula contemporánea. Nuestras investigaciones pretenden descifrar las condiciones del aprendizaje del conocimiento matemático avanzado en situación escolar, para ello estudiamos los mecanismos de incorporación del saber matemático al ámbito didáctico, cuando éste se sujeta a exigencias de aprendizaje por parte de los alumnos, los profesores y la institución.

## Presentación

La premisa inicial que sustenta la orientación de investigación de nuestro grupo de trabajo es que la enseñanza y el aprendizaje constituyen tanto una práctica humana como social, y que el compromiso de la disciplina, la *Matemática Educativa*, con la práctica educativa de referencia es lo que provee de sentido a su desarrollo. El nombre de *Matemática Educativa* da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado *Didactique des Mathématiques* o *Didaktik der Mathematik* por citar algunas de las escuelas mas dinámicas.

En esta época se acepta como una premisa funcional el que nuestra disciplina estudia los procesos de construcción, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Pues como se sabe, la disciplina se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No nos reducimos a la búsqueda de una "buena manera de enseñar" una cierta noción fijada previamente, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber, incluso aunque esta actividad se vea desviada de su objetivo de partida. La investigación en nuestro campo se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos, asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas. En suma, buscamos tener una mayor gestión sobre las regularidades

Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología; Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado, Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional: 26345-S

funcionales de las situaciones de enseñanza, y pretendemos dotar a la enseñanza y al aprendizaje con enfoques y formas nuevos. No sólo tratamos con la matemática como un tema escolar, sino también, queremos entender cómo es que los que aprenden se postran ante ella, comprender a la matemática desde la perspectiva del que aprende.

La línea de investigación que desarrollamos, se alberga al seno de lo que recientemente han nombrado *matemática y cognición* y la hemos denominado *pensamiento y lenguaje variacional*. Como parte del pensamiento matemático avanzado, el pensamiento y lenguaje variacional trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por una lado y con los procesos complejos del pensamiento por otro. Exploramos los procesos y los mecanismos funcionales del pensamiento de los que aprenden en una de especie de cognición situada, para enriquecer, a posteriori, las situaciones de enseñanza de la escuela contemporánea.

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una triple orientación. Por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio, en tercer lugar, tienen en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana.

Una construcción del concepto de variación cognitivamente efectiva presenta dificultades considerables y es, necesariamente, lenta; puesto que supone, por una parte, del dominio e integración de distintos campos numéricos y geométricos, números y magnitudes; N, Z, Q , R y C en un caso y todo un mundo de representaciones gráficas para magnitudes continuas, cada una con sus propias especificidades simbólicas, operatorias, estructurales y de representación, junto con la comprensión en profundidad de procesos específicos complejos como el paso al límite, la noción de variación y la noción paramatemática de variable o la articulación del pensamiento predictivo con su eventual matematización. Cada uno de los sistemas numéricos antes mencionados dispone de símbolos y representaciones propias, mediante las que se expresan las propiedades y relaciones que constituyen la correspondiente estructura conceptual y que satisfacen unas determinadas funciones cognitivas, todo ello ha de ser integrado por el alumno para la construcción significativa de la noción de cambio. Adicionalmente, se requiere de las nociones de infinito y variabilidad como componentes sustantivas.

Podríamos decir que nuestras principales contribuciones a la investigación son de doble naturaleza: investigación fundamental e investigación, digamos, aplicada. De la primera, hemos logrado localizar, aislar, analizar y reproducir tres de los mecanismos de construcción del conocimiento matemático cuando éstos se orientan, en situaciones determinísticas, mediante el pensamiento predictivo. Se trata la noción de predicción, propia de las ciencias, en una relación simbiótica-predadora con la noción de lo analítico, peculiar en matemáticas, donde hemos encontrado que existen mecanismos operativos idénticos entre los niveles psico y socio genéticos en la construcción del pensamiento variacional. De la segunda hemos desarrollado un amplio programa educativo con ventajas didácticas que puede ser documentado en el informe curricular.

Ubicados en el pensamiento variacional y buscando la predicción de la evolución de los sistemas complejos de cambio, se precisa como necesidad básica del funcionamiento de una centración en la manera de variar por encima incluso de la variable misma. Ello presupone una centración en el proceso mas que en el estado, y en consecuencia, de *mecanismos de constantificación* de las variables y de sus variaciones. El proceso de cambio se registra en la variación de las variables y requiere del reconocimiento del *praedicere* en los procesos de predicción de corto alcance en ámbitos de variación discreta y continua. El vínculo entre los procesos predictivos de corto y largo alcance en ámbitos discretos y continuos, se sustenta en otro mecanismo de funcionamiento en la construcción de conocimiento: el cambio posee *herencia*, con esto queremos decir que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto, la evolución de un sistema está determinado completamente pos sus variaciones primeras. Este proceso de construcción del instrumento para predecir que permita mirar a la variación continua para representarla en el contexto matemático, conduce de la idea de *predicción* hacia la noción matemática de lo *analítico*. En este pasaje entre nociones, el análisis del elemento local se torna el recurso obligado, toda vez que ahí, en el elemento, es donde se producen las transformaciones. Este proceso de construcción se revela vivo tanto en las producciones originales de los científicos del siglo diecisiete y se reproduce en las producciones de los estudiantes y profesores contemporáneos aunque no hayan sido sometidos a una enseñanza explícita de tales pasajes.

En el otro costado, los resultados de la investigación fundamental nos han permitido tender una fecunda línea de investigación que no cesa, sino hasta llegar a la enseñanza. Estos hallazgos, permiten dirigir la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza hacia el qué enseñar y no sólo al cómo enseñar. Se perfila para nuestro grupo, una nueva línea de investigación que toma como objeto de estudio, la base fenomenológica de los significados de los objetos matemáticos a partir de las intuiciones primarias del alumno, y que tiene por objetivo el rediseño del discurso matemático escolar. Hemos encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto avanzado que se desea enseñar, suele apoyarse en conceptos mas elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento de los conceptos previos. Este paso de la investigación fundamental al diseño de ingenierías didácticas toca tres preguntas de investigación que ocupan al momento la atención de nuestro grupo: ¿Cuáles son las leyes que regulan las situaciones de enseñanza del pensamiento variacional en nuestro sistema educativo y en el medio social? ¿De qué naturaleza son las regularidades en los actos de entendimiento, ante situaciones que precisan del pensamiento variacional? ¿Cuáles son las formas de articulación de los saberes matemáticos de modo que la aprehensión de situaciones variacionales sea alcanzada por la mayoría de los estudiantes en situación escolar?

La problemática de investigación descrita, nos han permitido desarrollar proyectos de Ingeniería Didáctica modificada tendientes a la construcción de tratamientos instruccionales que ejemplificaremos durante la exposición en la conferencia.

**Una anatomía del programa PyLV**

De momento no buscamos caracterizar lo que entenderemos por pensamiento y lenguaje variacional, nos conformamos con algo mas modesto, aunque fundamental; describir algunas situaciones[8] que precisen de su intervención. Sólo adelantamos, que el pensamiento y el lenguaje variacional describe, genéricamente, a un programa de investigación en marcha, un programa no excluyente ni de orientaciones teóricas ni de acercamientos metodológicos, con el que buscamos entender cómo es que se construye, o se forma, progresivamente el pensamiento y el lenguaje variacional en los estudiantes y en los grupos escolares. Particularmente estamos interesados en localizar y analizar las etapas por las que éste transita, esperanzados en dotar de enfoques alternativos a las realizaciones didácticas que atiendan seriamente al paradigma del aprendizaje.

En nuestro programa partiremos de una premisa básica, en la naturaleza lo único constante es el cambio. Las plantas y los árboles y los animales crecen, el torrente de los ríos y de las tempestades fluye incesantemente, los vientos desplazan gigantes y multiformes nubes, los cultivos de bacterias crecen a sus máximos límites posibles, la cantidad de circulante en una economía cambia de un momento a otro, los planetas se enfrían y se calientan en un

---

[8] Entendemos el término situación en el sentido que suele dársele en psicología, a saber, los procesos del pensamiento y las funciones cognitivas están en función de la situación a las que el individuo ha sido expuesto. El concepto de situación ha sido renovado en didáctica por Brousseau, quien le ha dado no solo un alcance didáctico que no tenía en psicología sino también un significado en el que la dimensión afectiva y dramática intervienen tanto como la dimensión cognoscitiva. La entrada a escena de los conceptos y los procedimientos matemáticos es un arte que se alimenta tanto de la psicología social como de la epistemología y de la psicología de las matemáticas

eterno proceso cíclico, la sangre corre por nuestras venas, la energía se transforma y con ella percibimos los distintos estados de un proceso de cambio, los puentes vibran, y en fin, un vasto tejido de situaciones de cambio escenifican nuestra cotidianeidad. Este cambio, como parte de la realidad, es independiente de la conciencia, pero es sólo a través de ella que lo hacemos parte de nuestros conocimientos. El cambio va, primero de lo sensorial, lo sentimos; a lo perceptual, lo percibimos como un primer estadío de abstracción para apropiarse de lo real y finalmente lo concebimos, lo recreamos en un mundo de objetos abstractos en el que adquiere sentido sólo a través de otros objetos y de sus relaciones. Es ahí, en este mundo de entidades ideales, que las nociones y los conceptos hacen su aparición con la ayuda de sus representaciones.

Este cambio, que caracteriza a la naturaleza, esconde bajo su intrincado aspecto desordenado, un robusto sistema de regularidades que han capturado el interés de grandes colectivos humanos durante distintas épocas y bajo diversos programas de investigación. Basta revisar fugazmente la literatura científica para encontrarse que Newton, Euler, Clairaut, Feynman, Maxwell, Aristóteles, Galileo, Laplace o Einstein trataron sistemáticamente con las situaciones de cambio. A manera de ejemplo centremos la atención en el movimiento; diremos que el movimiento existe en la naturaleza independientemente de la conciencia, pues es un proceso autónomo a nuestras elaboraciones teóricas, sin embargo nuestra visión del movimiento requiere de inventar una noción nueva, el cambio, con el cual podemos enfocar los estados, los sucesivos estados, como un primer nivel de elaboración teórica, una abstracción de primer orden. Este cambio, que ha abstraído del movimiento un aspecto, el de sus estados sucesivos, puede ser sometido a un nuevo proceso de abstracción, una especie de abstracción segunda o de segundo orden y conducir entonces a una nueva elaboración teórica; a la que llamaremos la variación. De este modo la noción de cambio da lugar al concepto de variación, el cual describe las cualidades del cambio, nos proporciona elementos para saber cómo es que cambia eso que cambia. En este sentido, la variación trata de la medida de los cambios. Como una metáfora posible, sabemos que tanto el límite de x como el de su cuadrado, cuando x tiende a cero, son cero, aunque sabemos que no llegan al cero de la misma manera. De modo que ambas variables varían de distinta forma en sus cercanías del cero. Si elegimos un sistema de representación externo específico, es posible interpretar la variación de modos diversos. Mediante fórmulas, gráficas, dibujos y diagramas o descripciones verbales metafóricas.

El pensamiento y lenguaje variacional, en tanto programa de investigación, trata entonces del estudio del cambio a través de su variación y lo hace desde una orientación múltiple que atiende a las distintas dimensiones humanas, la cultural, la individual y la social; lo cual se manifiesta en lo conceptual, lo cognitivo y lo didáctico.

Buscando precisar un poco mas, daremos a continuación una lista de ejemplos en los que el pensamiento y el lenguaje variacional se ponen en funcionamiento ante diversas situaciones de cambio, o mas específicamente, situaciones variacionales.

**Ejemplos de situación variacional especializada**

**Ejemplo 1.** ¿Qué tipo de análisis se precisa, por ejemplo, para describir que detrás del turbulento fluir de un río, es posible desentrañar, al analizar una parte central de su fluente, que al menos una regularidad es posible, y que puede expresarse mediante símbolos de un sistema de representación del cambio sumamente especializado como

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \text{ o } \nabla\cdot\vec{V}=$$

en el que consideramos $u$, $v$ y $w$ como las componentes de la velocidad V del flujo incompresible?

**Ejemplo 2.** El pensamiento y el lenguaje variacional son indispensables para saber que el siguiente enunciado es cierto,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{10^{10}}=0$$

pero no necesariamente para saber que la siguiente afirmación lo es,

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x+7\right)=10$$

**Ejemplo 3.** Sabemos que éramos 19, 32, 53, 81 en nuestras últimas medidas anuales. ¿Aproximadamente cuántos esperaríamos ser en la medida siguiente?

**Ejemplos de situación variacional cotidiana**

**Ejemplo 1.** Cuando una persona cruza la calle ante la inminencia de un vehículo veloz, ¿qué mecanismos operan en sus razonamientos e instintos que le permiten decidir si alcanza o no a atravesar la calle? Visto como un problema de ecuaciones diferenciales, se dispone de una cierta información de posición y de otra de celeridad, un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Sin embargo, la decisión del peatón, no representa con los símbolos convencionales la situación, sino opera cualitativamente en forma acertada.

**Ejemplo 2.** En un sentido mas básico, imaginemos el escenario en el que una señora sentada en una banca de parque mira frente a sí el paso de un veloz ciclista en plena recta final. Ella lo mira en distintos sitios, relativos al lugar, lo sigue con la mirada durante algunos segundos y después lo pierde de vista entre la multitud. ¿Qué imagen guarda su memoria del paso del ciclista?, una colección finita de imágenes fijas o una recreación fiel, dinámica, de lo que sus ojos captaron.

En la presentación daremos ejemplos que den cuenta de las siguientes tres grandes cuestiones con las que se busca localizar regularidades en el proceso de formación de ideas y teorías variacionales en las tres grandes dimensiones humanas, la individual, la colectiva y la cultural. *Desde el dominio de la didáctica:* ¿Cómo se ejerce la gestión de una situación de enseñanza que incorpore ideas variacionales? *Desde el dominio de la cognición:* ¿Cómo se construye el pensamiento variacional en la mente de los estudiantes? *Desde el dominio de la epistemología:* ¿Cómo se forma una idea variacional? Mas puntualmente parafraseamos las cuestiones anteriores en términos de preguntas que sugieren rutas para la acción tenemos: ¿Cuáles son las regularidades de una situación de enseñanza que pretenda poner en funcionamiento ideas variacionales en el ambiente escolar? ¿Cuáles son las funciones cognitivas que se operan cuando un estudiante trata con situaciones variacionales? ¿Qué procesos epistemológicos se operan cuando se conforma en la cultura una teoría variacional?

**Consideraciones finales**

La línea de investigación que desarrollamos considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple le llamamos el acercamiento socioepistemológico.

El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados. Supone del dominio de la matemática básica y de los mecanismos del pensamiento asociados, pero exige diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional. Dichas rupturas no pueden sostenerse con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce de la construcción de los número reales, ni tampoco descansar en la idea de aproximación; sino que deben permitir la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Al iniciar un curso de análisis, el estudiante debe concebir a la función como un objeto, y por ende susceptible de las operaciones que otro procedimiento efectúe sobre ella. En nuestras experiencias hemos encontrado que en caso de tener un dominio del contexto gráfico/visual, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones. El problema didáctico estriba fundamentalmente en la dificultad para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que hacerlo geométricamente.

Nuestra primera hipótesis consiste en asumir que la introducción al análisis precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. Esta hipótesis ha sido desarrollada siguiendo dos directrices; en primer término, se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables dando sentido a operaciones fundamentales. El segundo aspecto, lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de algunas primitivas.

Pasemos a la segunda tesis de nuestra aproximación. El binomio de Newton se escribe por vez primera como P + PQ y no como $a + b$. Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología que difiere de la que hoy enseñamos en clase. Atiende a un programa en el dominio de la ciencia con el que se busca predecir el comportamiento de los fenómenos de cambio. Un programa de matematización de los fenómenos modelables mediante la metáfora del flujo de agua aplicada por igual a la evolución de otras magnitudes.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El objeto matemático, binomio de Newton se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, de donde transita hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto de función analítica.

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no sólo, como ha sido habitual, sobre el cómo enseñar. En síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar.

## Referencias bibliográficas

**Cantoral, R**. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La matematica e la sua didattica*, (en prensa).

**Cantoral, R**. (1999). Cálculo diferencial e integral: Un acercamiento didáctico y epistemológico. México: Grupo Editorial Iberoamérica, (en prensa).

**Cantoral, R. y Farfán, R.-M**. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon - Edición especial*, (en prensa).

**Cantoral, R**. (1998). *Teaching and learning in a technological environment: The case of undergraduate mathematics*. CRM - Notes. Centre de Recerca Matemàtica del Institut D'Estudis Catalans. Barcelona: España.

**Cantoral, R**. (1997). Matemática Educativa en Latinoamérica: ¿Será posible el sur? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11*(1): 28-32.

**Cantoral, R. y Reséndiz, E**. (1997). *Aproximaciones sucesivas y sucesiones*. Colección de Cuadernos Didácticos Vol. 1, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

**Cantoral, R**. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. México: Cinvestav.

**Cantoral, R**. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis 11*(1), 55-101.

# Enseñanza del cálculo por medio de experimentos de física y evaluación del conocimiento (taller)

*Rüdiger Schäfer. Universidad de Bremen, Alemania*
*Patricia E. Balderas Cañas. Universidad Nacional Autónoma de México*

## 1. Introducción

El Taller se diseñó con el fin de conocer algunas ideas de los profesores acerca de si ¿los experimentos de física podrían ayudar a la enseñanza del cálculo? y ¿en qué dirección? Razón por la que el taller abordó la problemática de la enseñanza del cálculo diferencial e integral (niveles medio superior y superior), desde una perspectiva constructiva de la adquisición de algunos conceptos centrales del cálculo mediante la modelación matemática de algunas observaciones físicas de un péndulo simple. Se utilizó dicho experimento para ajustar la propuesta inicial de actividades del Taller a tres sesiones de noventa minutos.

Y otro de los propósitos fue ilustrar una forma de estudiar los procesos de representación del conocimiento, referidos a las actividades del taller sobre modelación matemática de observaciones físicas, como elementos a considerar en una evaluación del conocimiento adquirido en esas circunstancias. Para lo cual se interrogó a los participantes en el Taller sobre ¿cómo podrían enseñar los fenómenos oscilatorios de un péndulo simple?, al inicio de la primera sesión y al final de la segunda. El análisis y discusión de las respuestas tuvo como base la organización conceptual mostrada en cada respuesta.

## 2. Experimento del péndulo simple

La presentación del experimento del péndulo simple se hizo en dos sesiones, la primera sesión consistió de cuatro fases: experimental y colección de datos, análisis, comprobación y formulación de una tarea. Durante la fase experimental los participantes realizaron mediciones del tiempo en que el péndulo construido con un hilo y una tuerca completaba 20 ciclos de oscilación, y establecieron una primera conclusión sobre la dependencia del tiempo respecto a la longitud del hilo, emanada de las observaciones en pequeños grupos y de manera general.

Durante la fase de análisis se elaboró el modelo matemático a partir de las leyes físicas: descomposición en componentes para la fuerza gravitacional, fuerza de inercia y la ley de Newton, dando por resultado una ecuación diferencial de segundo orden y un juego de condiciones iniciales. Después se presentaron los métodos usuales del cálculo avanzado (ver referencias [1] y [3]), para obtener soluciones generales y particulares del modelo matemático; que permiten la formulación de la función $T$ de duración de una oscilación del péndulo, dependiente de la longitud $l$ del hilo del péndulo y de la aceleración gravitacional, $g$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

En la fase de comprobación experimental de la expresión para $T$, respecto a la no dependencia de la masa $m$ del cuerpo del péndulo, se mostraron dos péndulos de igual longitud pero de diferente masa (con dos botellas iguales, una vacía y otra con agua), para los cuales el período $T$ resultó ser el mismo. Y, por otro lado, se analizó la gráfica de la función $T = f(l)$ en la forma típica $y = \sqrt{x}$ para diferentes valores del parámetro $g$ (aceleración gravitacional), para obtener de ella y de (1) el valor $l = l_o$ respecto al cual el péndulo tiene un período de un segundo.

Durante la última fase de la primera sesión y a partir de los datos generados en la fase experimental, organizados en una tabla de dos entradas -tiempo en que el péndulo completó 20 oscilaciones y longitud correspondiente- se planteó la tarea: desarrollar un método para determinar el valor de la aceleración gravitacional en Santafé de Bogotá (lugar donde se realizó el experimento) por medio de la tabla de mediciones y la fórmula (1).

En la segunda sesión del Taller se presentó una modificación al experimento del péndulo en tres fases: experimental, análisis y discusión. La modificación consistió en sumergir el cuerpo del péndulo (la tuerca) en agua (péndulo friccionado), situación que provocó una atenuación del movimiento oscilatorio tan intensa que el péndulo se detuvo al cabo de unas cuantas oscilaciones, lo que permitió observar claramente la disminución paulatina en la amplitud.

Durante el análisis y con el fin de establecer el modelo matemático del péndulo friccionado se requirió agregar un término en la ecuación diferencial cuya solución se obtuvo por medio de una función de variable compleja, con los métodos estándares del cálculo avanzado (ver referencias [1] y [3]), correspondiente a los tres casos diferentes del péndulo friccionado: oscilatorio atenuado, caso límite no oscilatorio y del movimiento lento sobrefriccionado.

Finalmente, en la fase de discusión se subrayó la secuencia "experimento-modelo-matemáticas" en el caso del péndulo respecto a los detalles de la experimentación y a cómo construir las ecuaciones diferenciales que modelan situaciones experimentales.

## 3. Evaluación del conocimiento referido a las condiciones del Taller

La pregunta ¿cómo se podrían enseñar los fenómenos oscilatorios de un péndulo simple?, obliga a una reflexión sobre los objetivos de la enseñanza que permitan desarrollar en el estudiante habilidades de orden superior, por ejemplo, formular preguntas en términos matemáticos. Objetivos de esa naturaleza exigen el diseño coherente del currículo y la modificación de las prácticas de evaluación a fin de que no se inhiban dichos objetivos.

En general las prácticas de evaluación se reducen a la aplicación de técnicas aisladas basadas en preguntas cortas y estereotipadas, que se plantean en contextos abstractos y artificiales, las cuales fomentan la repetición imitativa de tareas similares [2]. Sin embargo, se reconoce tanto su confiabilidad para detectar habilidades simples como su efecto desastroso en el currículo.

El diseño de la evaluación requiere definir claramente su propósito (formativa, sumaria o estimativa) y el tipo de currículo que se desea seguir. Esta definición orienta el diseño de las tareas de evaluación respecto a: los logros a ser evaluados, los métodos apropiados de evaluación, el grado de apertura de las tareas, el grado de autonomía y flexibilidad que se requiere en ellas, la extensión y coherencia de las mismas y el contexto en que se les plantea (*Id.*).

Siguiendo la propuesta del Taller, experimentos, modelos y matemáticas, se ilustró lo relativo a la evaluación mediante el ejercicio de una práctica de evaluación basada en un análisis semántico de las respuestas de los participantes a la pregunta ¿cómo enseñar los fenómenos oscilatorios simples?

Las respuestas de los participantes en el Taller se recolectaron al inicio de la primera sesión (primera aplicación del ítem) y al final de la segunda sesión (segunda aplicación), y su análisis se mostró en la tercera sesión a través de cuatro casos representativos de las respuestas que fueron seleccionadas por su disponibilidad en ambas aplicaciones y por la representatividad de los tipos de respuestas identificadas. Las repuestas permitieron analizar las concepciones de los profesores sobre la enseñanza de los fenómenos oscilatorios, previas al Taller y después de dos de las tres sesiones de su duración.

El análisis tiene como supuestos que los participantes reflexionan sobre el trabajo realizado durante el Taller, de un día a otro, que tienen vivencias sobre el experimento del péndulo simple, que no utilizan esas vivencias como recursos para la enseñanza de las matemáticas y que no disponen (a nivel cognitivo) de un modelo teórico (físico y matemático) que les permita explicarse el fenómeno y operar con él.

Se encontró que los participantes con respuestas del tipo A utilizaron conceptos relativos al experimento del péndulo simple pero no se refirieron al tratamiento matemático. Los del tipo B mostraron claridad respecto a los requerimientos de medición e incluyeron en su respuesta listas de términos físicos. Y, los participantes con respuestas tipo C describieron una estrategia general en la enseñanza de las matemáticas orientada en primer lugar hacia la modelación de fenómenos simples y posteriormente hacia la observación de regularidades en un modelo físico.

El análisis semántico de las respuestas de los participantes mostró además algunos indicios del cambio conceptual, en un caso del tipo A, como incorporación de unidades de información no relacionada al conocimiento base mostrado en la primera aplicación y en otro caso, del tipo C, como un progreso en la precisión de la información proporcionada en la primera aplicación. Al parecer, el cambio conceptual y el progreso en la precisión, pudieron deberse a las actividades de la segunda sesión realizada 48 horas después de la primera.

## 4. Comentarios finales

Las preguntas y requerimientos de los participantes en el Taller mostraron un esfuerzo por entender el uso de las ecuaciones diferenciales en la modelación de los fenómenos observables, situación que nos sugiere que la propuesta "experimentos-modelos-matemáticas" podría ser útil para rebasar el carácter rigorista de la enseñanza típica de esos temas de cálculo avanzado y lograr un aprendizaje significativo de los conceptos y procedimientos involucrados, que le permita al que aprende producir respuestas que muestren una mejor organización conceptual desde el punto de vista de la matemática y la física.

### Referencias bibliográficas:

**Kreyszig, E.** (1990) *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Volúmenes I y II, México, Limusa, 5a. edición. ISBN 568 1822162.

**Swan, M.** (1993) Improving the design and balance of mathematical assessment. En Mogens Niss, *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 195-216.

**ZIll, D.G.** (1982) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México, Grupo Editorial Iberoamérica. ISBN 968 7270012.

# PENSAMIENTO NUMÉRICO

# El inicio de la educación matemática elemental de los adultos

*María Elena Valdemoros Álvarez*
*Cinvestav-IPN, México*

## Introducción

La educación básica de las personas de 15 años de edad en adelante es una de las demandas actuales más importantes que enfrenta México. En los últimos años, estuvieron incorporados a la Primaria para Adultos alrededor de 800,000 hombres y mujeres de diferentes edades e inserción social; para dar respuesta a las necesidades más elementales de instrucción previas a la primaria se atendió a más de 800,000 personas del nivel de Alfabetización (INEA, 1997, p. 5).

Asimismo, esa problemática ha recibido un tratamiento especial a nivel internacional (UNESCO, 1997), ámbito donde se admite que a pesar de las marcadas diferencias nacionales, la demanda educativa de los adultos crece en el mundo y se acentúan las dificultades de acceso y permanencia en las instituciones destinadas a brindar ese tipo de instrucción.

Por todo lo explicitado anteriormente y ante la necesidad de acompañar tales cambios desde el campo de la investigación, hemos iniciado el estudio de los procesos cognitivos detectables en los jóvenes y adultos que reciben formación matemática elemental, en el terreno de la Educación Primaria. Esta comunicación está centrada en los contenidos aritméticos fundamentales con los que se desarrolla el inicio de la labor de instrucción en ese nivel.

## Propósitos de este estudio

Tomando en consideración que los números naturales son objeto de conocimientos previos para el adulto, por los intercambios que con ellos ha sostenido al interior de la cultura y por sus propias elaboraciones matemáticas en el nivel escolar que antecede a la Primaria de Adultos, nos propusimos explorar los **significados que el sujeto asigna a los naturales** y las **relaciones numéricas que con ellos establece**, al enfrentar distintas situaciones didácticas y resolver problemas aritméticos muy elementales.

## Marco teórico

Es bastante notoria la diversidad de situaciones sociales, ocupacionales y culturales que ha enfrentado cada adulto antes de su incorporación a la educación elemental; esas experiencias lo han dotado de ciertos recursos para el aprendizaje, los que podrán facilitar otros aprendizajes posteriores. Tal planteamiento lo expresan Catalán y Gallach (1997), entre otros muchos investigadores que admiten en ello un punto didáctico de partida para la atención de las demandas educativas de dichos sujetos. Lo cual supone, en el presente estudio, la reconstrucción y recuperación de la experiencia previa de los adultos, a partir del planteamiento de problemas aritméticos que permitan la emergencia de distintas relaciones y significados entre números naturales; el aprendizaje resultante será más rico, en la medida en que los problemas aritméticos presentados logren mayor proximidad con las referidas experiencias de vida de los adultos.

Sin embargo, Zuasti y López (1989) señalan que tal diversidad de experiencias previas de los adultos resaltan las diferencias personales entre los miembros de un mismo grupo (en términos de sus niveles de aprovechamiento y ritmo de avance), a la par que acentúan las dificultades para el diseño de los problemas aritméticos a ser trabajados con ellos. Es decir, la enseñanza y el aprendizaje matemático de estas personas están profundamente afectados por dichas diferencias y requieren una mayor riqueza en los tratamientos didácticos.

Aunque los modelos de enseñanza y las estrategias didácticas a seguir con los jóvenes y adultos en proceso de formación matemática elemental deben ser objeto de un diseño especial, algunos de sus contenidos curriculares coinciden con los de otras modalidades de educación matemática elemental (las adoptadas para la enseñanza de los niños, en particular). Tal es el caso de la semántica atribuible a los números naturales, en cuyo seguimiento hemos considerado los significados del número natural como "cardinal", "ordinal" y "medida" derivada del conteo, conforme a lo planteado por Fuson y Hall (1983).

**Método**

Este estudio preliminar tuvo un carácter eminentemente cualitativo y ofreció los puntos de partida de una investigación a ser desarrollada próximamente, en base a objetivos más amplios.

La experiencia de campo tuvo lugar en un grupo de 10 adultos de reciente incorporación a la primaria. La modalidad de trabajo didáctico seguido en el mismo era tutorial, de manera que cada integrante del grupo avanzaba a su propio ritmo y en base a un intercambio directo entre el sujeto y su asesor. La mayor parte de las personas que componían el grupo eran jóvenes cuyas edades oscilaban entre los 17 y 25 años; su asistencia no presentaba patrones fijos, por lo cual, la composición numérica del grupo no era estable. Tampoco exhibían sus miembros antecedentes análogos en la formación matemática previa.

La exploración inicial desarrollada en el grupo consistió en varias observaciones directas del mismo, en el transcurso de las sesiones destinadas a las matemáticas. El responsable de éstas fue el tutor asignado a los adultos, por la propia institución. El material didáctico en uso era el libro adoptado durante los últimos años, para respaldar la producción individual de los miembros del grupo. A posteriori, ejercimos un control cruzado entre dos observadores (esto es, entre el observador que fungió como tal durante toda la investigación y la autora de la presente comunicación), a fin de validar los resultados obtenidos por esta vía.

Seguidamente, la experiencia básica del estudio consistió en la introducción y desarrollo de las Actividades de Aritmética incluidas en el Módulo I del texto recientemente publicado por el Instituto Nacional para la Educación de los

Adultos (véase Valdemoros et al., 1997). Las mencionadas Actividades estaban compuestas por una serie eslabonada de problemas, mediante los cuales se promovía el reconocimiento de distintos significados de los números naturales (cardinal, ordinal y medida asociada al conteo), como también, de relaciones de orden y de equivalencia entre dichos números. Las situaciones didácticas consideradas eran marcadamente similares a las experiencias de vida de los adultos con los que se trabajó; las elaboraciones de éstos consistieron en el completamiento de datos, el ordenamiento de los mismos, la explícita vinculación de modos diversos de representación ligados a idénticos contenidos semánticos, la proposición de nuevas situaciones en las que pudieran reconocerse los significados y las relaciones numéricas ya establecidas.

La correspondiente labor tutorial fue ejercida en este último caso por la autora de la presente comunicación, quien contó con el respaldo de un observador. El último, posibilitó la aplicación de un procedimiento para la validación de la experiencia, en tanto permitió un registro muy cuidadoso de los eventos y diálogos registrados en cada sesión. Una fuente adicional de control de estas labores la ofreció el contraste entre las respuestas generadas por el mismo adulto, frente a diversos poblemas de análoga conformación. Por su lado, la tutora mantuvo ante el grupo una cuidadosa labor de retroalimentación de actividades, afín con las modalidades constructivistas intrínsecas a la propuesta didáctica adoptada; es decir, la retroalimentación no supuso una actitud pasiva en el grupo de adultos, sino una búsqueda de confirmaciones y verificaciones de la solución por parte de éstos.

**Interpretación de los resultados obtenidos**

El significado de número natural más consolidado en este grupo fue el del cardinal, particularmente, en las situaciones de reconocimiento de cantidades muy incorporadas a la experiencia de dichas personas (cantidades aproximadas de vecinos y miembros de su comunidad, cantidades de dinero, entre otras). Esta prevalencia de los contenidos semánticos cardinales del número natural coincide con los resultados registrados en distintos estudios llevados a cabo con sujetos de otras edades (véase Fuson y Hall, 1983).

El significado del ordinal les resultaba accesible en tanto éste correspondiese a dígitos y no permaneciese asociado a situaciones relativamente complejas. A muchos miembros de este grupo se les dificultó la comprensión de la asignación del "primero, segundo y tercer premios" en diversas competencias deportivas, porque tendían a atribuirlos a quienes se demoraban más tiempo en las mismas. La incorporación de los nombres de los ordinales desconocidos por ellos constituyó una marcada fuente de confusión.

Por lo común, exhibieron una tendencia muy pobre hacia el uso del natural como medida resultante del conteo, o sea, como reconocimiento comúnmente designado en términos de "medida no convencional" (por ejemplo, n vasos de leche o de agua, n tazas de frijol, para establecer la dimensión de cierta clase de objetos), a pesar de que había una evidente comprensión de dicha noción. La idea de medida en asociación con el natural estuvo expresada con soltura, en presencia de ciertas "unidades convencionales" ligadas a un complejo sistema usado universalmente (a modo de ilustración, 155 centímetros de estatura). Las primeras medidas parecían no ser admitidas como legítimas, en tanto que las últimas eran las únicas consideradas auténticas; el status asignado al número, en uno y otro caso, tenía un destino análogo al de la medida.

En contraste con lo anterior, las actividades ligadas al reconocimiento de relaciones de orden y equivalencia entre números naturales fueron resueltas con mayor éxito, aunque pudimos detectar en tales tareas algunas dificultades de resolución en los adultos.

Por último, la escritura y lectura de números naturales de tres o cuatro cifras causó notables conflictos en la mayoría de los integrantes del grupo. Atribuimos esto a la circunstancia de que, por lo común, ellos manejaban cotidianamente cantidades compuestas por dos cifras.

## Conclusiones

A nivel de la resolución de tareas diversas, los adultos de este grupo exhibieron un mayor dominio del significado cardinal asignado al número natural, en tanto el mismo permaneciese asociado al tipo de cantidades que ellos manejaban comúnmente. Los restantes significados del número natural fueron usados de manera inestable.

Las relaciones de orden y de equivalencia entre números naturales fueron reconocidas con relativa facilidad.

En general, comprobamos que las situaciones didácticas y los problemas aritméticos más cercanos a la experiencia laboral, cotidiana o familiar de los adultos concitaron soluciones adecuadas.

### Referencias bibliográficas:


- **Catalán, J. y Gallach, M**. (1997). La Necesidad de la Existencia de la Educación Permanente de Adultos para el Desarrollo Promocional y la Cualificación Profesional de las Personas. *Quaderns, 5. Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.
- **INEA**. (1997). Comunidad INEA, 90. *Gaceta oficial del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos*. México.
- **Fuson, K. y Hall, J.** (1983). The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review. En: H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking.* New York: Academic Press.
- **UNESCO** (1997). Plan de Acción para el Futuro de la Educación de Adultos. *Education News. Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.
- **Valdemoros, M., Limón, A., Marván, L., Ramírez, M., Nicanor, C., Pinzón, M., Campa, A. y Fernández, J.** (1997). *Matemáticas, Libro 1.* Texto del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, nivel de Primaria. México. pp. 7-38.
- **Zuasti, N. y López, F**. (1989). *Las Matemáticas en la Educación de Adultas/os.* Madrid: Editorial Popular. pp 67-84.

## La clase de matemáticas y la comunicación

*María Leticia Rodríguez González*
*Becaria de Conacyt*

Tratar de interpretar los acontecimientos que se viven en el salón de clase son complejos por naturaleza. En virtud de esta advertencia, el presente ensayo intenta reflexionar sobre los acontecimientos que se viven en la cotidianeidad del aula, cuando los niños se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos y los obstáculos que se les presentan en tal sentido. La reflexión se dirige en las dificultades que se presentan cuando el contenido de la comunicación son nociones matemáticas. El análisis se realiza a partir del trabajo con un grupo de 2° grado de una escuela primaria pública, ubicada al norte de la ciudad de México. Donde la actual propuesta curricular de matemáticas pretende que los niños construyan los conceptos como una herramienta intelectual para la resolución de problemas de la vida diaria. Sin embargo, los aspectos estrictamente institucionales y el sentido social de uso del concepto se encuentran en evidente desvinculación, lo que imposibilita la comunicación entre el docente y el niño, dado que mientras el maestro se esfuerza para que el niño adquiera y construya los conceptos matemáticos, el alumno simplemente concibe la acción del profesor como una tarea escolar.

Los proyectos de investigación en Educación Matemática vinculados a la resolución de problemas aritméticos, se han caracterizado por su intención pedagógica y didáctica. Lo que a nosotros nos interesa es traspasar el horizonte didáctico, e instalarnos en el marco de la comunicación, dónde lo didáctico no alcanza su máximo esplendor ante las complejas relaciones que se gestan en la vida cotidiana del salón de clases.

Hemos llegado a esta reflexión, después de más de diez años de trabajo con diferentes grupos de educación primaria, y en los cuales a pesar de poner en práctica diferentes modelos didácticos, el problema de la falta de comunicación y comprensión, continua prevaleciendo. Por lo que es imprescindible detenerse a repensar el sentido de la interpretación de las matemáticas como un acto de enseñanza[1] Consideradas como una de las materias más abstractas que difícilmente se le puede vincular con la realidad[2].

Se observa una enorme distancia entre como se piensa, cómo se enseña y como se aprende, y cómo los niños entienden lo que aprenden y cómo lo

[1] La enseñanza concebida como transmisión, se cierra a ser un acto fragmentado que desconoce las relaciones que se dan en el salón de clases, las cuales tienen referentes que van más allá de lo didáctico y lo escolar. Para nosotros la Enseñanza tiene una connotación más profunda, la cual tiene que ver con un proyecto social que trascience hacia los horizontes de lo educativo, abriendo las posibilidades de la formación matemática.

[2] Esta disociación matemáticas-realidad ha sido desde el punto de vista histórico un obstáculo para la realización del acto de Enseñanza en sentido estricto. El acto de Enseñanza se le considera en este documento como un verdadero proyecto de comunicación. Donde se ponen en juego diferentes subjetividades para entenderse y relacionarse a través de los contenidos temáticos.

aplican. Incluso pareciera que cuando los niños son sometidos a un proceso de enseñanza se obstruyeran sus procesos de razonamiento y comunicación para resolver problemas matemáticos, esto lo he venido observando con diferentes grupos de primer grado, pues cuando se les propone al principio de ciclo escolar resolver problemas aditivos con fines de evaluación, los niños logran resolverlos utilizando sus propias estrategias, pero al paso de los primeros meses, muchos de los alumnos ya no pueden resolverlos, y no sólo en la decisión de qué algoritmo aritmético utilizar; sino que esto trasciende hasta el plano de la comprensión del texto escrito: se observa la separación del aprendizaje de las matemáticas y del español, los niños muestran serias dificultades para reunir ambos contenidos, y por otro lado los maestros tienen estas dificultades en la enseñanza.

Como podemos apreciar, aquí hay tres elementos importantes a considerar: la toma de decisión en cuanto a la elección de la estrategia matemática pertinente, la aceptación de los maestros de la utilización de estas herramientas que el niño va construyendo para la resolución de problemas; y por último la estrecha relación con la comprensión lectora y la más determinante el significado que los niños van construyendo sobre la resolución de problemas matemáticos. Los dos primeros son del orden pedagógico y didáctico, y la última está relacionada directamente con el entendimiento y la comprensión del campo matemático, el cual interpela no lo sólo lo cognoscitivo, sino lo más importante los espacios de formación escolar y social.

Desde la perspectiva instrumental la enseñanza se ha desarrollado con la finalidad de optimizar la transmisión de conocimientos pero desde nuestra concepción, la *Enseñanza* rebasa ese sentido, ya que lo que buscamos trascender hacia el horizonte de la formación matemática en los sujetos, donde a través de desarrollar sus potencialidades cognoscitivas estos sujetos entiendan, comprendan, critiquen y construyan conceptos matemáticos, es decir, buscamos articular la formación matemática con la comunicación.

Actualmente estamos tratando de comprender el proceso de comunicación desde una doble dimensión: como profesoras y como investigadoras, a través de la aritmética centrándonos en el tratamiento de problemas aditivos.

A través del trabajo que se realizó con los niños de este grupo, se observó que los niños entienden de maneras distintas el uso de marcas matemáticas (+ - = x ), lo cual repercute en las soluciones que dan a los problemas aditivos y multiplicativos[3] Cuando a los niños se les pide resolver algoritmos matemáticos no tienen mucha dificultad para relacionarlos con los signos

3 Fuson C. Karen planea que el uso depende del significado que tienen de ellas, por ejemplo "...cuando los niños empiezan a resolver problemas de adición y substracción escriben con marcas matemáticas (por ejemplo 4 + 2 ó 5 – 3) ellos usan objetos para modelar cada problema. El uso de los objetos depende de los significados que ellos dan a las marcas + y - Dan interpretaciones típicas de (+) como cambio-agregar a..., y para (-) separando de..." Research on learning and teaching addition an substraction of whole numbers. Pág. 74

(+) y (-) asociados a los significados de agregar, y quitar respectivamente; pero cuando se trata de resolución de problemas se ha observado que tratan de llegar a la solución a través de diferentes caminos, han aprendido que tienen que dar una respuesta expresada a través de un algoritmo, y la complejidad se transfiere en la toma de decisión para elegir el algoritmo adecuado.; hay poco esfuerzo por tratar de entender el sentido del problema, se observa la ansiedad por que se les sugiera cual es el algoritmo pertinente

Es importante resaltar que no se trata de un problema de aprendizaje ni de enseñanza, sino de comunicación, pues presentarle una situación problemática a través de un texto escrito para el infante carece de significado, pues hay pocos elementos para poderlos relacionar con una comprensión lectora del texto escrito.

Por ejemplo, se les pidió que resolvieran el siguiente problema:

***Fui a una granja, en la cual no alcanzaba ver a las gallinas, lo único que podía ver eran sus patas. Si eran 38 patas, ¿cuántas gallinas había?***

Para resolverlo, primero hubo necesidad de comentar con el grupo cómo se podría resolver, algunos propusieron dibujar, otros contar, pero lo más importante que dijo uno de ellos es que las gallinas tenían dos patas y que por lo tanto dos patas eran de una gallina. De acuerdo con las respuestas de los niños se pudo observar que:

**a) No se comprendió la intención del problema, resolviéndolo con el uso de un algoritmo o dibujo de números los cuales carecen de sentido para la situación problemática planteada:**

Roberto utiliza el algoritmo de la multiplicación, pero los datos que anota son totalmente ajenos al planteamiento inicial.

Roberto cordero Islas

2X20=24

**a') Estos niños consideraron sólo algunos datos del problema, utilizan dibujo de muescas, números o un algoritmo para resolverlo; pero se observan escasos elementos de comprensión del problema**

Carol escribe que son 40 gallinas, dibuja 20 pares de muescas apareadas con una raya, desconociendo el dato que se le había proporcionado sobre las 38 patas

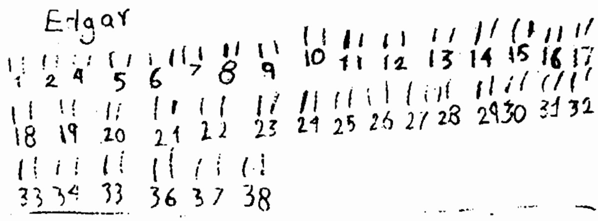
Carol Ana arizaga calleja

¿ 40 gallinanas son en total 40

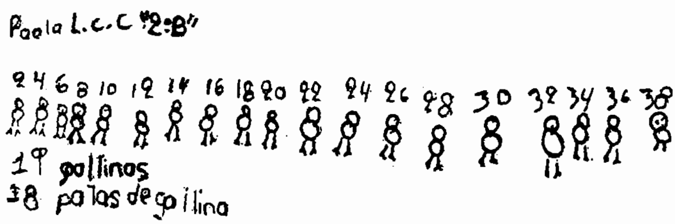
40

R=40 gallinas

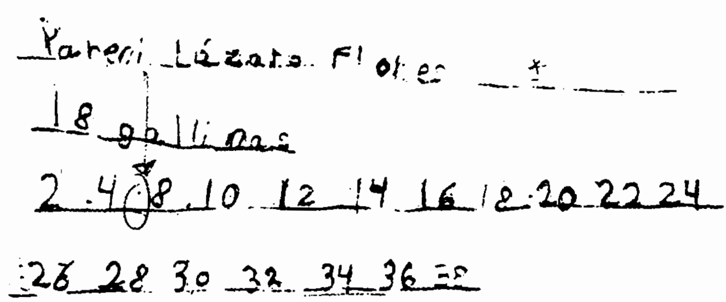
b) **Uso de muescas, aquí es importante observar como se da una transición entre las estrategias que los niños van construyendo para resolver el problema y la comprensión del problema mismo.**
Edgar dibujó cada par de patas con muescas (rayas) y debajo de cada representación la serie numérica de 1 en 1 hasta el 38, lo cual nos mueve a preguntar ¿significa que pata es igual par para éste niño? ¿Por qué duplicó la cantidad de patas, y a su vez de gallinas? ¿qué es lo que el niño entendió acerca del problema?



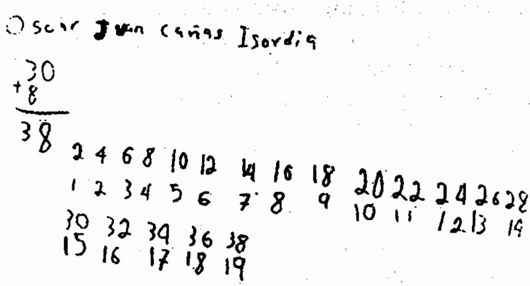

c) **Como tercer estrategia es la utilización propiamente del dibujo de los números en donde se manifiesta la presencia de comunicación, porque se observa que sus representaciones son coherentes con la necesidad planteada.**
Paola hace uso de dos elementos, el dibujo de las gallinas con sus respectivas patas por un lado y por otro la escritura de la serie numérica.




Yareni escribe la serie de 2 en 2 pero se equivoca al principio, omite el número 6 , por lo que llega a la conclusión de que son 18 gallinas.



Oscar Ivan, hace un doble conteo, primero escribe la serie de 2 en 2 la cual representa el número total (cardinalidad) de patas, y debajo de cada número




la serie de 1 en 1 para indicar el número de gallinas, obteniendo de esta manera 19 gallinas.

**Referencias bibliográficas**


- **Fuson C.** *"Research on learning and teaching addition on subtraction of whole numbers"*
- **Zavala, V. S., et. Al.** (1981) "Imagen y lenguajes" Barcelona.
- **Guiraud P**. (1995) *"La semiologla"* Siglo XXI, México.
- **Eco, H**. *"Tratado de Semiótica General"*
- **Cobb, P., Bauerfsfel**, (1995) *"The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom Cultures"* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Hillsdale, New Jersey.
- **Piaget, J**. (1984) *"Psicología del niño"* Edit. Morata. Madrid
- **Lowell, K**. (1977) *"Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños"*. Morata, Madrid
- **Puig, J.; Bilss, J.** (1987) *"Problemas Aritméticos Escolares"* Síntesis, España

## LA ARITMÉTICA... UN TABÚ PARA LOS ESTUDIANTES DEL NIVEL SUPERIOR

*Leticia Corral Bustamante*
*Instituto Tecnológico de Ciudad Cuauhtémoc*
*Cd. Cuauhtémoc, Chihuahua, México*

**Objetivo de la Investigación.**-Obtener información en forma cualitativa y cuantitativa de estudiantes que ingresan al nivel superior en el ITCC[4] acerca de la imagen conceptual de expresiones matemáticas que involucran aritmética y que desembocan directamente en el concepto de infinito, con la finalidad de contribuír en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula.

**Justificación.**-Altos índices de reprobación de estudiantes en materias que involucran aritmética en sus unidades de estudio.

**Marco Teórico.**-Lo importante de esta investigación en cuanto a los sujetos estudiados no es tanto la representación mental, en sí misma, que acerca de conceptos aritméticos esté albergando, sino la acción cognitiva que se apoya en dicha representación mental. Si la generalización, la representación y la abstracción, son mecanismos comunes de construcción del conocimiento como menciona Dreyfus en [6], entonces la ***Didáctica de las Matemáticas*** debe dedicarse al estudio de ellas para profundizar más en la forma del pensar matemático, es por ello, que nuestro interés se centra en los instrumentos semióticos empleados en las representaciones matemáticas[5] que muestran nuestros alumnos en el presente trabajo, las cuales son punto de partida para iniciar la *Unidad de Funciones* que está comprendida en la materia de *Matemáticas Básicas para Computación (Matemáticas Discretas)* para la carrera de Licenciatura en Informática que ofrece el Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos de nuestro país. Sfard, 1991, señala, que las concepciones matemáticas en las mentes de los individuos tienen que ver con las estructuras sintácticas y los contenidos semánticos contextuales. Por todo lo anterior, construir conceptos aritméticos, valiéndonos de la representación decimal[6], tan usada por los alumnos en nuestra institución, significa el reto principal consecuente a la presente exploración, toda vez, que tomamos conciencia de que muchos de los problemas, tribulaciones, erratas, indecisiones, titubeos y obstáculos que sufre un estudiante que pasa por la experiencia de estudiar materias tales como álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial, cálculo integral, probabilidad, estadística, física y otras que requieren bases matemáticas, se evitarían si ese estudiante dominara la aritmética elemental con pericia y profundidad, tal cual lo menciona Ojeda, E. et al. (1994).

**Metodología.**-Se aplicó y elaboró un *exámen de diagnóstico* a dos grupos de alumnos de Licenciatura en Informática sobre *funciones* inyectivas,

[4] Instituto Tecnológico de Ciudad Cuauhtémoc.

[5] Y apoyados en la hipótesis Piagetiana que dice que existe una realidad independiente del pensamiento del sujeto.

[6] Forma privilegiada de representación.

suprayectivas y biyectivas y funciones donde interviene el **operador módulo**, *funciones localizadoras,* las cuales desempeñan un importante papel en las matemáticas y en las ciencias de la computación, así como sobre *composición de dos funciones y sobre una sucesión de elementos de X como una función de {1, 2, ...} a X.* Estos temas constituyen uno de los pilares fundamentales para la carrera de Licenciatura en Informática, según retículas provenientes de la DGIT[7]. El presente estudio se centra únicamente en la función que contenía al operador módulo, una **función localizadora,** para almacenar y recuperar enteros no negativos arbitrarios en celdas en la memoria de una computadora, la cual, junto con su respuesta, se muestra en Anexos. Ésto, debido, a que, fue en este punto, donde los alumnos presentaron grandes deficiencias de tipo aritmético, no así en los otros tipos de funciones mencionados. Dado que una *función localizadora* es una expresión algebráica de la forma $f(x) = x \text{ mód } y$, si $x$ es un entero no negativo y $y$ es un entero positivo, se define $x \text{ mód } y$ como el resíduo de dividir $x$ entre $y$, en éste caso, el resíduo obtenido, corresponde al número de celda donde se almacena un dato dado.

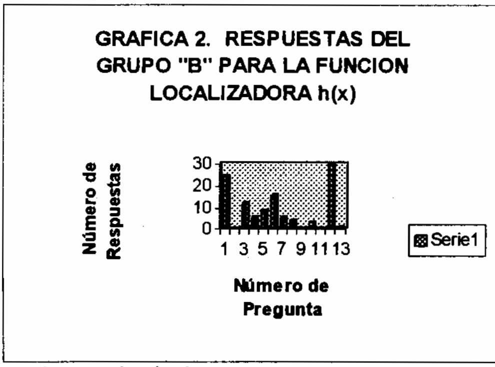
**Hipótesis de la Investigación.-**Las representaciones matemáticas que presentan los estudiantes que ingresan al ITCC, son producto de las imágenes conceptuales que de las definicones conceptuales aritméticas han albergado en sus mentes desde temprana edad. Los niveles de educación anteriores al superior desempeñan un papel importante al respecto, dado que una etapa importante en los individuos para el fortalecimiento, reforzamiento y/o modificación de sus ideas intuitivas, es en edades menores a los 17 años. Cambiar dichas ideas a edades mayores a las mencionadas, requerirá de un esfuerzo pedagógico muy grande (ver Hitt, 1989, 1993).

**Resultados.-**Las respuestas de los grupos de alumnos se clasificaron de acuerdo a los siguientes rubros : 1)imagen conceptual inadecuada acerca del concepto de infinito, 2)imagen conceptual adecuada del concepto de infinito, 3)forma diversa de numerar las celdas, 4)no numera celdas, 5)no almacenó datos en celdas, 6)almacena datos al azar en celdas al azar, 7)almacena datos en orden del 1 al 6 en celdas del 0 al 5, 8)almacena correctamente de 1 a 5 datos, 9)almacena correctamente todos los datos, 10)almacena datos distintos a los dados, 11)efectúa operaciones aritméticas correctamente, 12)realiza operaciones aritméticas inadecuadamente y, finalmente, 13)no realizó el problema. En la Tabla 1 podemos observar las respuestas de ambos grupos de acuerdo a la clasificación anterior y en la Gráfica 2 observamos las respuestas del Grupo "B".

**Tabla 1 RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS PARA LA FUNCION LOCALIZADORA**

| Rubro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº Resp. Grupo "A" | 19 | 2 | 6 | 3 | 1 | 11 | 4 | 15 | 1 | 3 | 1 | 20 | 5 |
| Nº Resp. Grupo "B" | 24 | 0 | 12 | 5 | 8 | 15 | 5 | 4 | 0 | 3 | 0 | 30 | 1 |

[7] Dirección General de Institutos Tecnológicos.




**Conclusiones.**-El gran obstáculo que presentaron los alumnos con respecto a la función localizadora dada, fue, como podemos observar, de carácter aritmético, y, del análisis cualitativo y cuantitativo que se realizó al respecto, sobre las respuestas de los alumnos, se concluye que éstos :

- No saben realizar operaciones aritméticas (especialmente divisiones, en las cuales se observaron en varios de los casos puntos decimales en resíduos, por ejemplo,

$$\begin{array}{r} 2.2 \\ .666\overline{)1.932050808} \\ 1.332 \\ .6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ .666\overline{)1.410} \\ 1.33 \\ .1 \end{array}$$

- Se deja entrever que los alumnos albergan en sus mentes imágenes conceptuales inadecuadas sobre el **concepto de infinito**, al presentárseles una división por cero (en algunos de los casos consideran $1/0 = 0$, $1/0 = 1$, y, en otros casos, ignoran el cero del denominador como en $h(2)= \sqrt{2} + 1/(4-4)$, dando como resultado *2.414* y aún más, dan la respuesta para *h(2)=1.414,* pasando por alto, el término *1/(4-4)*).
- Recurre a procesos al azar para dar una respuesta.
- Presentan formas muy variadas de pensar, cuando de ordenar (en éste caso, almacenar) datos se trata.
- Algunos resultados de la pregunta son satisfactorios (menos el almacenamiento del dato 2, excepto un caso) para el grupo "A".

**Anexos**

**Pregunta**

Para la *función localizadora* dada, escriba cómo deberían insertarse los datos en el orden dado, si se supone que inicialmente las celdas están vacías. Use el método de resolución de rechazos.

$$h(x) := \sqrt{x} + \frac{1}{x^2 - 4} \quad \text{mód } (2/3)$$

Las celdas están numeradas del 0 al 600; datos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**Respuesta “correcta”**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | | | 4 | | | | | | | | |
| *0* | *1* | . | . . | . | . | . | . | . | *85* | . | . | . | . | . | . | . | . |
| | | 5 | | | | | | 6 | | | | | | | | | 3 |
| . | . | *286* | . . | . | . | . | . | *482* | . | . | . | . | . | . | . | . | *600* |


**Referencias bibliográficas:**

- **Hitt, F.** (1989). "Obstacles related to the concept of function. *British Society for Research into Learning Mathematics*". Departamento de Matemática Educativa del CINVESVAV-IPN., PNFAPM., México.
- **Hitt, F.** (1993). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Evasión de representaciones analíticas. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, Cd. Juárez, Chihuahua.
- **Ojeda, E. et al.** (1994). Software para la Evaluación en Aritmética por Computadora, *Memorias del V Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* del Área Microcomputadora en el Aula e Investigación en Educación Matemática, Mérida, Yucatán.
- **Piaget, J., García R.** (1983). *Sicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI, , México.
- **Sfard, A.** (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Educ. Studies in Mathematics, vol. 22, 1-36,.
- **Tall, D.** (ed), (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers

# PENSAMIENTO ALGEBRAICO

# Diseño de situaciones en las construcciones de los conceptos abstractos del álgebra lineal

*R. Chargoy*[1], *A. Oktaç, F. Cordero.*
*Cinvestav-IPN. México.*

El estudio del álgebra lineal por la matemática educativa ha sido cada día más necesario, debido al poco éxito que se tiene en los cursos, sobre todo en los niveles donde el alumno está obligado a trabajar la parte estructural del álgebra lineal.

Hemos visto que algunas de las dificultades más comunes pueden ser las siguientes:

Los alumnos están familiarizados al trabajar con algoritmos, pero no con los conceptos y estructuras matemáticas. Los ejemplos introductorios no motivan al estudiante, ya que se pueden resolver sin necesidad de álgebra lineal, son simples ejercicios de cálculo. Al estudiante no se le motiva al decirle, que las aplicaciones del álgebra lineal se tienen en teorías más elaboradas y complejas, que no alcanzará a estudiar en el primer curso. Puede suceder que los alumnos deben utilizar conceptos en álgebra lineal, sin tener bases suficientemente sólidas, por ejemplo, el concepto de función que se debe emplear en una transformación lineal. La abstracción que se hace al pasar de espacios vectoriales geométricos $R_2$ o $R_3$, a espacios de dimensión mayor, o a espacios más generales, por ejemplo de polinomios o funciones. Los estudiantes no entienden la necesidad de las demostraciones, ni las diversas técnicas empleadas en ellas, confundiendo las condiciones necesarias y suficientes en las demostraciones.

Las opiniones de algunos investigadores respecto a las dificultades.

Sierpinska (1994) considera entre las fuentes de dificultades conceptuales las siguientes:

*La existencia de varios niveles de descripción:* los lenguajes empleados en los diferentes niveles conceptuales, como el geométrico de $R_2$ y $R_3$, ortogonalidad, etc., el lenguaje de la teoría de $R_n$, n-adas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones, etc, y el de la teoría más general, de espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores, kernel, etc. El constante cambio en el lenguaje de estos tres niveles de descripción, que además coexisten. *Los problemas de representación:* vectores y operadores lineales, tienen representaciones que dependen de una base y los estudiantes tienen dificultades para entender las representaciones de un operador lineal en diferentes bases. De acuerdo al marco teórico de Piaget & García, del intra, inter y trans nivel de un conocimiento, los estudiantes deben operar en el trans-nivel para poder manejar los conceptos más generales del álgebra lineal, sin embargo, muchos de ellos están en el inter-nivel.

Dorier (1995) dice que los conceptos del álgebra lineal son difíciles de entender, porque son de naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta, y

[1] Becario DGETI-Conacyt

que las teorías axiomáticas de espacios vectoriales o grupos, no fueron creadas como otros elementos matemáticos, para resolver nuevos problemas. El objetivo principal fue encontrar un método general para resolver diferentes problemas con las mismas herramientas, y generalizar y unificar los conceptos anteriores, es decir, que a la axiomatización del álgebra lineal no se llegó de la posibilidad de encontrar una solución a un problema no resuelto, sino del poder de generalización y unificación y consecuentemente simplificación de los conceptos.

Dubinsky (1997) nos dice que las dificultades que tienen los estudiantes para entender los conceptos del álgebra lineal, se deben a que nunca han tenido la oportunidad de construir sus propias ideas respecto a los mismos, y que no se usan estrategias pedagógicas para que el estudiante tenga esa oportunidad.

El objetivo del proyecto es estudiar las construcciones mentales que hacen los estudiantes para llegar al entendimiento de los conceptos del álgebra lineal. Los marcos teóricos en los que se basa este proyecto son: los modos de pensamiento geométrico sintético, analítico aritmético, y analítico estructural como los estudia Sierpinska; y la teoría acción-proceso-objeto-esquema (apos en inglés), de Ed Dubinsky.

Se menciona brevemente el enfoque histórico epistemológico (Dorier, 1996), que contribuye al entendimiento de los conceptos del álgebra lineal, a comprender las características de los mismos y las dificultades que se presentan en el proceso enseñanza-aprendizaje. Leibniz en su trabajo *Geometría de Situación*, trataba de evitar los métodos analíticos en geometría, para que las demostraciones fueran menos complicadas. Las investigaciones posteriores dan origen a la representación geométrica de los números complejos; y poco tiempo después al álgebra de los cuaternios, este es el principio de los espacios vectoriales. Al intentar separar el álgebra de la geometría, se propicia la evolución de las dos disciplinas. Sin embargo es hasta tiempo después que se desarrolla el método axiomático. Desde el punto de vista de los modos de pensamiento, el pensamiento "Geométrico Sintético " aparece primero en la historia y de manera subsecuente los modos "Analítico Aritmético" y "Analítico Estructural". Aunque no se puede decir cual es el más relevante, se puede inferir que la importancia de ellos se debe a su interacción. En la evolución histórica de los conceptos del álgebra lineal, se puede observar el "juego" de la geometría en el desarrollo de los mismos; y como el álgebra ha propiciado el crecimiento de la geometría. El análisis anterior, nos lleva al estudio de los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural dentro del álgebra lineal (Sierpinska, 1996). Estos modos de pensamiento pueden ayudar a entender las dificultades que tienen los estudiantes, al hacer las construcciones de los conceptos.

Cabe mencionar, que se tienen resultados en los trabajos de los profesores del diplomado en Matemática Educativa de la Universidad de Pachuca Hidalgo, sobre las dificultades que se presentan en los estudiantes en la transición, y en la coexistencia de los pensamientos sintético y analítico al resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Otro punto de vista es el análisis epistemológico de la teoría *acción-proceso-objeto-esquema* (Dubinsky, 1997). Esta nos dice que el conocimiento matemático es una tendencia individual a responder en un contexto social, a una situación problema que se percibe construyendo, reconstruyendo y organizando en la mente acciones, procesos, objetos y esquemas con los cuales trata en una situación. En esta teoría una vez que se ha analizado un concepto, se diseña una instrucción para que el alumno construya las acciones, procesos y objetos y los utilice para resolver problemas.

De las propuestas didácticas, se presenta a continuación un resumen de las más importantes que se tienen hasta la fecha.

A. Robert, J. Robinet e I. Tenaud (Dorier, 1997)a partir de la hipótesis de que un trabajo previo en geometría analítica, podría favorecer el aprendizaje de los primeros conceptos del álgebra lineal, desarrollaron algunos ejercicios de geometría analítica, que con un enfoque vectorial se pudieran resolver fácilmente. Efectuaron secuencias donde la solución de los ejercicios estuvo discutida con los estudiantes en pequeños grupos, de forma que la eficacia de la herramienta vectorial pudiera obtenerse. Sin embargo no han evidenciado un mejoramiento de los estudiantes preparados de esta forma.

En un segundo trabajo A. Robert y J. Robinet precisaron algunas dificultades planteadas por la enseñanza del álgebra lineal, apoyándose en los resultados de un cuestionario del examen para los estudiantes del segundo año de la licenciatura. En otros trabajos, han hecho algunas propuestas de secuencias para introducir al curso de álgebra lineal, que han experimentado en París, pero la evaluación no es aun muy precisa.

G. Harel sostuvo en 1985 su tesis doctoral sobre la enseñanza del álgebra lineal al final del nivel de secundaria y a principios del nivel superior. En una investigación en 1987, a partir de un análisis muy interesante de treinta y dos libros de texto del álgebra lineal, presenta cuatro tipos diferentes de enfoque para introducir a un curso de álgebra lineal; estos son: analogía, abstracción, isomorfismo y justificación o aplazamiento. Termina el artículo con algunas reflexiones en forma de interrogación, sobre la influencia de estos diferentes enfoques en el aprendizaje de las nociones del álgebra lineal. En 1990 propone una introducción al álgebra lineal, que se funda sobre una hipótesis de naturaleza epistemológica y cognitiva. El enfoque que sugiere comprende tres faces que conducen gradualmente a la abstracción: Una visualización de los conceptos a través de la geometría, y los vectores del espacio y del plano. La representación y el establecimiento de la dimensión de Rn, a través de los sistemas de ecuaciones lineales. Los espacios vectoriales abstractos de dimensión menor o igual a tres. Señala que ha realizado una experiencia, y que en un cuestionario de evaluación los estudiantes que tuvieron la enseñanza experimental, obtuvieron resultados significativamente mejores que aquellos de la enseñanza tradicional.

Jerry Porter, describe un enfoque pedagógico, en un curso de álgebra lineal para los que no tienen muchas matemáticas. Usa un texto con aplicaciones pero de escasa teoría. Asigna a cada estudiante de la clase, la tarea de escribir un capítulo explicando los conceptos de subespacio, base y dimensión como complemento al texto. Ellos toman como punto de partida el espacio vectorial solución de un sistema de ecuaciones lineales, y se les pide relacionar este material a dimensión, líneas, planos e hiperplanos. J. Porter reporta que su experimento tuvo éxito en términos del aprendizaje de los estudiantes y sus actitudes respecto al material teórico.

Dorier (1995) describe un enfoque para la enseñanza del álgebra lineal (y otros temas) en los que él explícitamente enseña lo que llama "conceptos unificadores y generalizadores". Estos son conceptos construidos para unificar y generalizar diferentes métodos ya operativos en varios contextos. Para enseñar tales conceptos, por ejemplo la estructura de un espacio vectorial, propone usar una secuencia basada sobre un análisis epistemológico, en el que se crea un contexto artificial que motiva el desarrollo de los axiomas de espacio vectorial por los mismos estudiantes.

El Grupo de Estudio del Currículum de Álgebra Lineal, (en inglés LACSG) propone que el curso se oriente hacia las aplicaciones y operaciones con matrices.

Dubinsky (1997) propone estrategias pedagógicas que empiecen con un análisis de las construcciones mentales específicas, que puedan usarse en el entendimiento de un cierto concepto. Entonces a los estudiantes se les presenta ante situaciones problema, diseñadas para alimentar tales construcciones. Finalmente, las interacciones entre estudiantes, instructor y problema, involucran a los estudiantes tratando de obtener la solución del problema, y al instructor tratando de que los estudiantes revisen sus construcciones, que sean más efectivos al resolver el problema, y más consistentes con las construcciones del instructor.

El estudio de álgebra lineal presenta un panorama muy extenso, sin embargo después de tomar en cuenta las consideraciones que se mencionan, se ha pensado en el concepto de base de un espacio vectorial en este proyecto:

En el álgebra lineal el estudio de espacios vectoriales es un concepto central y la base es un concepto medular del espacio vectorial. En la evolución histórica del álgebra lineal los sistemas de ecuaciones lineales ocuparon el primer lugar en la investigación así como el concepto de rango no como lo conocemos actualmente, pero está implícito en los estudios iniciales sobre sistemas de ecuaciones lineales. Este concepto es particularmente fértil por sus aplicaciones por ejemplo en geometría, transformaciones lineales, transformada de Laplace transformada de Fourier, solución de ecuaciones diferenciales, etc. En la investigación bibliográfica hasta este momento se ha encontrado que hay poca información en este tema. Al aplicar un examen a un grupo de profesores, se analizó la dificultad que tuvieron con el concepto de base. Para resolver el problema recurrieron a la representación geométrica (pensamiento sintético), tuvieron confusión con el número de elementos de la base y la dimensión del espacio vectorial. Aquí surgen algunas preguntas como¿Necesitan los estudiantes algo para visualizar? Si piensan el problema en $R^2$ ó $R^3$ y se generaliza a dimensión 4, ¿el argumento geométrico los lleva a otro contexto? ¿Para algunos alumnos sería más fácil encontrar una base formalmente? ¿La dificultad puede ser la base o la dimensión? ¿Cómo podría introducirse el concepto de base para que los estudiantes no tengan estas dificultades? ¿Cómo lo tratan los libros: analíticamente, sintéticamente, intuitivamente, usando ejemplos introductorios, analogías, combinación de pensamientos, tecnologías (software, geométrico)? Si no se entiende el concepto de base, ¿qué conceptos o temas se afectan por su desconocimiento? ¿Cómo expresa el alumno este desconocimiento en otros temas? ¿Qué papel juega la base al resolver ecuaciones lineales? Si entiende el alumno el concepto de base de espacio vectorial, ¿lo puede llevar a ecuaciones lineales?

**Referencias bibliográficas:**


- **Dorier, J.** (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, pp. 175-197
- **Dorier, J. L** (1996) A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, pp. 227-261.
- **Dorier, J. L.** (1997). *Recherches en Didactique des Mathématiques.L' Enseignement de L' Algèbre Linèaire en Question*. Coordonné par Jean-Luc Dorier avec les contributions de Harel, Hillel, Rogalski, Roobert, Sierpinska et al. Collection dirigée par Nicolas Balacheff.
- **Dubinsky, E**. (1997). *Some Thoughts on a first course in Linear Algebra al the College Level* in Carlson et Al. (ed.s) Resources.
- **Hillel, J. & Sierpinska, A**. (1994). *On one persistent mistake in linear algebra*, PME, Portugal
- **Harel, G.** (1987). *Variations in linear algebra, For the learning of Mathematics*, 7, 3 November
- **Sierpinska, A.** (1996). *Synthetic and Analytic modes of thinking in linear algebra*, BaCoMeT 4 publications. H.N. Jahnke, N. Knoche;-M. Otte (Eds), Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning. Göttingen. Vandenhoeck and Ruprecht.

# Visualización de conceptos matemáticos empleando conceptos económicos

*Uldarico Malaspina Jurado*
*Pontificia Universidad Católica del Perú*
*umalasp@pucp.edu.pe*

## Introducción

Aunque la palabra visualización es casi autoexplicativa y es frecuente usarla en educación, considero pertinente puntualizar que visualizar, en matemáticas, es hacer representaciones concretas –generalmente gráficas- de relaciones y conceptos matemáticos. No se trata de mostrar una visión inmediata de las relaciones, sino de dar la oportunidad de hacer una interpretación coherente, vinculando conocimientos y observación visual. Debemos destacar la importancia de la visualización, tanto por su uso desde el nacimiento del pensamiento matemático y por su gran ayuda para intuir, descubrir y formalizar relaciones entre objetos matemáticos, como por las ventajas que brinda para la comunicación , la enseñanza y el aprendizaje. Podemos advertir el gran valor que tenía la visualización para Gauss, cuando dice *"las matemáticas son una ciencia de los ojos"*

Conocer conceptos de otros campos del saber y modelos matemáticos de la realidad, contribuye a desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos y así reforzar su comprensión y manejo y facilitar una "intuición de lo abstracto". Ciertamente la física es una rica fuente para estos propósitos; sin embargo también las ciencias sociales, en particular la economía, nos brindan ahora una amplia gama de posibilidades para visualizar y ejemplificar conceptos matemáticos, pues la explicación, predicción y modificación de la realidad social es también preocupación del hombre y en la búsqueda de conclusiones lógicas a partir de ciertos supuestos, se ha pasado ya - sobre todo en economía - de los análisis "literarios" o "discursivos" a estudios con rigor y a la construcción de modelos matemáticos, tanto por la incursión de economistas al mundo de las matemáticas, como por la incursión de físicos y matemáticos al mundo de la economía. Muchos Premios Nobel en economía han sido otorgados por los aportes al análisis económico con trabajos de alto contenido matemático.

Teniendo en cuenta lo anterior y la importancia de mostrar a nuestros estudiantes las matemáticas interrelacionadas con otras ciencias - más aún en nuestra sociedad cada vez más globalizada - será muy útil que quienes estamos dedicados a mejorar la calidad de la educación matemática conozcamos algunos conceptos económicos fundamentales y cómo ellos nos permiten visualizar conceptos matemáticos y nos ayudan a dar -aun desde la secundaria- interpretaciones y aplicaciones diferentes a las que conocemos en la física y otras ciencias naturales. Por ejemplo, en la realidad física es natural y evidente visualizar el espacio de tres dimensiones y parece abstracto e irreal un espacio de cinco, seis o más dimensiones; sin embargo en economía podría considerarse irreal e irrelevante un modelo válido sólo en espacios de dos o tres dimensiones; así, los vectores de $n$ componentes tienen un significado muy específico y real, aunque $n$ sea mayor que 3, tanto desde la perspectiva de los productores como de los consumidores y las operaciones vectoriales tienen una interpretación completamente natural, fácilmente visualizada en dos y tres dimensiones y generalizada sólo con intuición y sentido común. Visualizar el efecto que tiene en el presupuesto de un consumidor el incremento o disminución de alguno de los precios de los bienes que consume, o de su ingreso, es realmente ilustrativo al estudiar rectas y planos; más aún, al distinguir movimientos en una curva o superficie y desplazamientos de tal curva o superficie, en estrecha vinculación con cambios en las variables endógenas y exógenas del modelo y con el concepto de equilibrio en economía.

En estas notas se sugiere una manera -un tanto informal- de visualizar conceptos matemáticos empleando conceptos y terminología de la economía. Plantear preguntas de carácter económico e irlas respondiendo empleando conceptos matemáticos, permite visualizar e interpretar a éstos en contextos que no se usan habitualmente en la enseñanza de las matemáticas, pero que son naturales desde el punto de vista de la economía. Así el estudiante se inicia en el análisis económico, amplía su visión de las aplicaciones de las matemáticas y desarrolla más su intuición científica.

Partiendo de algunas interpretaciones económicas de una ecuación lineal sencilla en dos variables, se llega de manera natural a temas de optimización y de combinaciones convexas de vectores, pasando por interpretaciones de rectas y planos, de vectores de $n$ componentes y de funciones de varias variables y sus conjuntos de nivel. Se explican y emplean intuitivamente los conceptos económicos de restricción de presupuesto de un consumidor, conjunto de posibilidades de producción de una empresa, tasa económica de sustitución, función de producción, isocuantas, isoganancia, procesos de producción y asignación eficiente de factores de producción, y se usan en su contexto expresiones de la "jerga" económica, como "canasta" de bienes de un consumidor, factores de producción, variables exógenas y endógenas, coeficientes tecnológicos, posibilidad tecnológica y niveles de producción.

## 1. Ecuaciones e inecuaciones lineales.

Ciertamente sería poco útil ser un experto en resolver ecuaciones e inecuaciones si no se desarrolla la capacidad para proponer y resolver problemas que involucren a ellas. En esta sección veremos cómo pueden interpretarse algunas ecuaciones e inecuaciones lineales desde el punto de vista económico, con su correspondiente visualización gráfica, abriendo así interesantes perspectivas para el trabajo con problemas.

Consideremos ecuaciones lineales con dos variables, de la siguiente forma:

$ax + by = c, \quad a, b, c > 0; \; x \geq 0, y \geq 0$

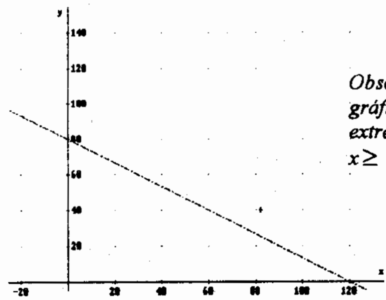
En concreto:

$2x + 3y = 240; \quad x \geq 0, y \geq 0$

Una interpretación económica (desde el consumo):

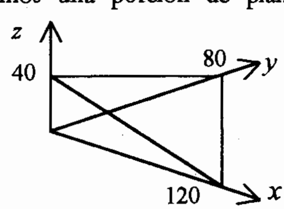
$x$: cantidad de un bien (p.ej. kilos de trigo); $y$: cantidad de otro bien (p.ej. kilos de arroz); 2: precio de cada kilo de trigo; 3: precio de cada kilo de arroz; $2x + 3y$: gasto al comprar x kilos de trigo, y kilos de arroz; 240: unidades monetarias disponibles;

$\{(x, y) \in \overline{R}_+^2 \ / \ 2x + 3y = 240\}$ : posibles combinaciones de kilos de trigo y arroz que son adquiribles gastando \$ 240. *(Restricción de presupuesto.)*




*Observar que en verdad la representación gráfica es sólo el segmento de recta de extremos (0; 80) y (120; 0) , por ser $x \geq 0$, $y \geq 0$*

- ¿Qué pasa si la riqueza del consumidor aumenta, por ejemplo en un 10%? La ecuación sería entonces $2x + 3y = 264$, mostrando una mayor capacidad de compra. Gráficamente esto significa una traslación de la recta "hacia el nor este".
- ¿Qué pasa si se modifica alguno de los precios?
- Supongamos que el precio del arroz se incrementa, de \$3 a \$4. Así la ecuación sería $2x + 4y = 240$ y gráficamente esto significa un cambio de inclinación de la recta. Se hace menos empinada: se mantiene como un extremo del segmento el punto (120; 0), pues en caso que el consumidor decida gastar todo su dinero sólo en trigo, seguiría comprando 120 kilos; pero el otro extremo baja al punto (0; 60), pues si el consumidor decidiera gastar todo su ingreso sólo en arroz, lo máximo que podría comprar es 60 kilos.
- ¿Qué pasa si en lugar de tener sólo dos bienes para adquirir se tienen tres o más?
- Por ejemplo si el consumidor desea gastar sus \$ 240 en trigo, arroz y carne de vacuno, podemos tener la restricción de presupuesto $2x + 3y + 6z = 240$, considerando, además de lo anterior, que $z$ representa kilos de carne de vacuno y que 6 es el precio de cada kilo de esta carne. Gráficamente tendríamos una porción de plano "apoyada" en los semiejes positivos



Es interesante observar que, por ejemplo, comprar 1 kilo menos de carne de vacuno implica disponer de $6 y así poder comprar:

- 3 kg más de trigo, manteniendo los de arroz; o
- 2 kg más de arroz, manteniendo los de trigo; o
- algo más de trigo $(\Delta x)$ y algo más de arroz $(\Delta y)$, de modo que $2\Delta x + 3\Delta y = 6$.

Este análisis, con fuerte sustento en lo práctico, va más allá de los ejercicios mecánicos de valor numérico de expresiones algebraicas.

También se pueden plantear, como en el caso de sólo dos bienes, problemas y visualizaciones referidas a cambios de la riqueza del consumidor y de los precios de los bienes. Los primeros se visualizarán con desplazamientos paralelos de la porción de plano y los segundos con cambios en la inclinación de la porción de plano (salvo que todos los precios cambien en la misma proporción).

Observar que es natural considerar más de tres bienes y así trabajar en $R^n$ con $n > 3$. La visualización hecha facilita la comprensión de estos casos.

Otra interpretación económica (desde la producción de una empresa):

La ecuación $2x + 3y = 240$; $x \geq 0, y \geq 0$, también podemos interpretarla en el contexto de la producción de una empresa, considerando que ésta produce dos tipos de bienes A y B; así: $x$: cantidad del bien A que produce la empresa; $y$: cantidad del bien B que produce la empresa; 2: cantidad de un factor de producción (p.ej. horas-hombre) que requiere la empresa por cada unidad que produzca del bien A; 3: cantidad del mismo factor de producción (p.ej. horas-hombre) que requiere la empresa por cada unidad que produzca del bien B; $2x + 3y$: cantidad del factor de producción que requiere la empresa para producir $x$ unidades del bien A más $y$ unidades del bien B; 240: cantidad disponible del factor de producción (p.ej. de horas-hombre).

$\{(x, y) \in \overline{R}_+^2 \ / \ 2x + 3y = 240\}$ : posibles cantidades a producir de los bienes A y B empleando las 240 unidades del factor de producción.

Cambios en las variables **exógenas**:

- Cambiar el término independiente (240) ahora significa cambiar la cantidad disponible del factor de producción. Se visualiza con una traslación de la porción de recta.
- Cambiar los coeficientes de las variables (2 y 3) ahora significa cambiar los *"coeficientes tecnológicos"*. Se visualiza con un cambio de inclinación de la porción de recta.

Notar que ambos cambios se visualizan con movimientos **de** la porción de recta.

Los cambios de las variables **endógenas** se visualizan con movimientos **en** la porción de recta: por ejemplo, si se producen 30 unidades de A tendrán que producirse 60 de B y si se desea producir más de A (por ej. 66) tendrá que producirse menos de B (36, siguiendo el ejemplo). Los puntos de coordenadas $x = 30, y = 60$ y de coordenadas $x = 66, y = 36$ están, ambos, en el segmento de recta de posibilidades de producción.

Si se considera la producción de dos tipos de bienes, cada uno de ellos usando dos o más factores de producción, de los cuales se disponen a lo más ciertas cantidades, el conjunto de *posibilidades de producción* queda determinado por inecuaciones de dos variables, visualizables en el plano y de gran utilidad al resolver problemas de optimización.

## 2. Funciones y combinaciones lineales

Se puede ilustrar y visualizar muy bien el concepto de función de dos variables observando la relación tecnológica que hay entre las cantidades de los factores de producción que se usan y la cantidad del producto que se obtiene. (Se asume que estas cantidades pueden expresarse en números reales.) Teniendo dos maneras de producir el mismo bien (dos *procesos de producción*) se ve fácilmente que es posible tener infinitas maneras de producir tal bien y en el fondo está el concepto de combinación convexa de vectores.

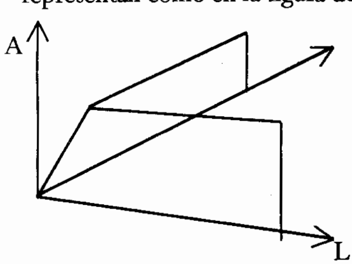
### 2.1 Problema:

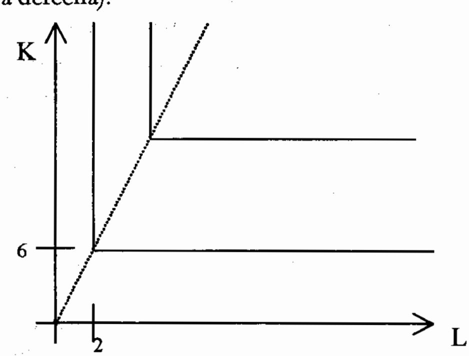
*Para producir cada unidad del bien A se requieren 2 horas-hombre y 6 horas-máquina. Si se disponen de L horas-hombre y K horas-máquina ¿cuántas unidades del bien A se pueden producir?( O sea,¿cuál es la función de producción?)*

Luego de obtener lo que se produciría con algunos pares $(L, K)$ como (2, 6); (4, 12); (4, 15) y (13, 19), se concluye que la respuesta a la pregunta la da la función

$$f(L, K) = \text{mín} \ \{\frac{L}{2}, \frac{K}{6}\}$$

Esta función, cuya gráfica se representa en la figura de la izquierda, es poco usada en otros campos, pero resulta de manera natural en Economía y brinda la ocasión de hacer análisis interesantes y de visualizar fácilmente sus curvas de nivel, que en este contexto económico se llaman *isocuantas* (pares de los factores $L$ y $K$ correspondientes al mismo nivel de producción) y se representan como en la figura de la derecha).



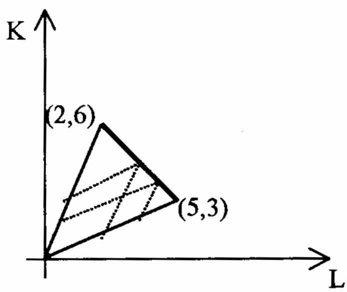
## 2.2 Una variante en la producción del bien A

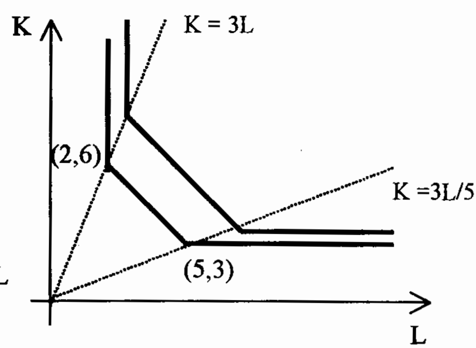
Supongamos que además de producir cada unidad del bien A empleando 2 horas-hombre y 6 horas-máquina, también sea posible producir cada unidad de A empleando 5 horas-hombre y 3 horas-máquina. Si la empresa dispone de los dos procesos de producción, ¿cuántas maneras eficientes (sin desperdicios) tiene de producir una unidad de A?

En este caso se tiene otra función de producción (g) que representa la tecnología, o el proceso de producción adicional que se está describiendo. Tenemos entonces:

$$f(L, K) = \text{mín}\ \{\frac{L}{2}, \frac{K}{6}\}; \quad g(L, K) = \text{mín}\ \{\frac{L}{5}, \frac{K}{3}\}.$$

Si los dos procesos de producción están disponibles, se puede ver que hay infinitas maneras de producir eficientemente una unidad de A (gráfico de la izquierda). Todas ellas están dadas por las combinaciones convexas de los vectores (2, 6) (con él se produce eficientemente una unidad de A según el proceso f) y (5, 3) (con él se produce eficientemente una unidad de A según el proceso g). El mismo razonamiento se hace para cualquier nivel de producción de A y se tiene entonces las nuevas isocuantas y el cono de eficiencia tecnológica, limitado por las rectas K = 3L y K = 3L/5




Con este marco teórico se plantean muchos e interesantes problemas cuyas soluciones permiten visualizar y comprender mejor las combinaciones lineales y las combinaciones convexas.

**Referencia bibliográfica:**


- **Guzmán, M.** de (1996). *El rincón de la pizarra. Visualización en Análisis*. Pirámide. Madrid.
- **Malaspina, U.** (1994). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Fondo Edit. PUCP. Lima.
- **Mas-Colell, Whinston y Green**. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. USA.
- **Parkin, M.** (1995). *Microeconomía y Macroeconomía*. Addison Wesley Iberoamericana. México.
- **Varian, H.** (1992). *Microeconomic Analysis*. (3a. edición) Norton and Company. USA.

# PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

## Propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría

*Dora Odstrcil, María Rey Genicio, Graciela Lazarte y Clarisa Hernández*
*Universidad Nacional de Jujuy, Argentina*

Somos integrantes de un equipo de investigación autores del proyecto Diagnóstico y Mejoramiento en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio. Este equipo lo formamos docentes de la Fac. de Humanidades y docentes de matemática de las cátedras de Análisis Matemático I, Algebra y Geometría Analítica , perteneciente al primer año de la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy – Argentina.

El trabajo que vamos a presentar lo dividiremos en dos partes:

I. La propuesta didáctica.

II. La vinculación de la propuesta con nuestro trabajo de investigación.

**I. Comenzaremos describiendo la propuesta didáctica :**

En el año 1997 se desarrollaron en Jujuy las 8ª Jornadas del NOA sobre Articulación entre los Niveles Medio y Universitario en la disciplina Matemática. Al concluir dichas jornadas realizamos una encuesta a los participantes y entre otros aspectos pudimos confirmar que el perfeccionamiento docente en Matemática es de gran interés y prioritario para los profesores.

A raíz de lo expuesto y siendo conscientes de que en el mundo se está haciendo mayor uso de la computadora y calculadora en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es que hemos organizado una experiencia ( con modalidad taller) acorde a la época que vivimos.

Hemos elegido la geometría como tema para desarrollar en el taller, ya que ésta está un poco relegada a la hora de planificar las actividades curriculares, y la tendencia actual es revalorizarla.

Entre los software disponibles seleccionamos el programa Cabri – Géomètre pues posee la ventaja de que las figuras geométricas pueden ser realizadas a través de acciones similares a las que el alumno debería desarrollar si trabajase con lápiz y papel.

**Características del taller:**

El taller tuvo una duración de 30 horas reloj, con una evaluación final, siendo el requisito de aprobación la elaboración de un trabajo.

El citado trabajo final consistió en la confección de una actividad o problema para ser desarrollada en la computadora usando el programa Cabri y podía ser planteado a modo de una propuesta destinada a alumnos del nivel medio.

Al taller concurrieron 37 profesores, los que trabajaron en grupos de dos profesores por computadora, contando para ello con un cuadernillo guía que contenía:

i. Una lista de los principales comandos

ii. Una descripción general de los comandos que permiten la construcción, edición y exploración de las figuras geométricas
iii. Una serie de actividades que debían desarrollar con la computadora, usando el programa.

**Contenidos desarrollados**

a) Segmentos: Medida. Mediatriz. Proyección sobre un eje.
b) Angulos: Medición
c) Rectas: Oblicuas. Paralelas. Perpendiculares
d) Triángulos: Construcción. Simetría respecto de un punto y respecto de un eje. Rotación. Medianas, alturas, mediatrices, bisectrices y sus propiedades. Propiedades de los lados. Puntos notables.
e) Circunferencia: Inscripta y circunscripta en un triángulo. Construcción dadas distintas condiciones. Circunferencia de Euler.
f) Cuadriláteros: Construcción
g) Proporciones: Determinar en forma geométrica el cuadrado y el recíproco de un número. Número de oro. Razón áurea.
h) Trigonometría: Comportamiento ( crecimiento, decrecimiento, valores máximos, valores mínimos ) de las funciones trigonométricas.
i) Polígonos regulares: construcción.
j) Transformaciones: Homotecia. Traslación. Simetría. Rotación.
k) Lugar geométrico: Parábola. Elipse. Hipérbola.
l) Geometría fractal: Construcción de la curva de Koch, del copo de nieve de Koch y del triángulo de Sierpinsky.

**Comentarios de taller**

Es de destacar que la mayoría de los profesores tenía muy poco conocimiento de computación, no obstante no tuvieron mayores dificultades en la utilización del programa, coincidiendo todos en que el mismo podía ser utilizado por alumnos de Nivel Medio.

Por otra parte mencionaremos que el trabajo de los profesores fue sumamente intenso y participaron con gran entusiasmo. Los docentes se comprometieron a utilizar la computadora en la enseñanza de la geometría, en aquellos establecimientos que contaran con el equipo necesario.

*Los comentarios y análisis de los trabajos finales merecen un párrafo aparte y dan origen a la segunda parte de nuestro trabajo.*

**II. Vinculación de los trabajos finales con nuestro trabajo de investigación**

El proyecto, que comienza en 1996, se origina por la necesidad de investigar y analizar algunos aspectos que hemos detectado a través de nuestro trabajo como docentes de matemática, ya sea en cursos de ingreso o en el primer año de cursado de las distintas asignaturas. La problemática que hemos observado nos ha llevado a planteamos algunas hipótesis sobre las posibles falencias, atribuibles a los docentes, en la enseñanza de la matemática en el Nivel Medio. Estas son:

1.–Los docentes no siempre son claros en los enunciados de las situaciones problemáticas que presentan a los alumnos. Esto provoca, por una parte, que el estudiante no resuelva correctamente el problema por falta de comprensión de la consigna y por otra, crea el hábito de obviar la lectura para preguntar directamente al docente qué es lo que debe hacer.

2.– Los profesores presentan a los alumnos situaciones problemáticas y/o de cálculo de manera repetitivo, sin buscar la variedad de aplicaciones que cada tema ofrece. Así se induce a los alumnos a realizar un trabajo mecánico sin ejercitar el pensamiento analítico y lógico.

3.– La formación recibida por los profesores tanto en el aspecto disciplinario como en el pedagógico no les brinda las suficientes herramientas como para que se desenvuelvan con eficiencia en sus primeros pasos por el aula. Esta eficiencia recién la logra a través de la experiencia y por sus propios medios.

*Con el afán de determinar si estábamos en el camino correcto, analizamos los trabajos que debían presentar los docentes que concurrieron al taller.*

Realizaron dicha evaluación 37 profesores , los cuales representan una muestra heterogénea de la población total de profesores de matemática correspondientes a capital y al interior de la provincia de Jujuy (Argentina) .

En el análisis de las pruebas se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

**1.– Lenguaje**
**2.– Consigna de la actividad propuesta**
**3.– Redacción general del trabajo**
**4.– Desarrollo de la actividad propuesta**
**5.– Evaluaciones**
**6.– Planteo de objetivos**
**7.– Errores de ortografía y/o puntuación.**
**8.– Originalidad de la actividad propuesta**

A continuación explicaremos los criterios de análisis de cada aspecto enunciado y presentaremos los resultados del análisis.

1. En el aspecto ***lenguaje*** se atiende a las cuestiones relacionadas con la falta de rigurosidad en el lenguaje matemático, como ser el uso de un vocablo por otro , la ausencia de términos necesarios , o las expresiones equivocadas para indicar un determinado procedimiento. Hay 16 actividades que presentaron dificultades.
2. En lo que hace a la ***consigna o enunciado de la actividad propuesta*** se analiza la claridad y completitud de la misma. Se detectaron 12 enunciados con dificultades
3. En el ítem ***redacción general del trabajo*** se analiza la habilidad con que el docente organiza las ideas para expresarlas por escrito. De las evaluaciones presentadas 7 poseían redacción general confusa, y cabe destacar que 5 de éstas también presentan falencias en el Lenguaje o bien en la claridad del enunciado.

4. En el ítem ***desarrollo de la actividad propuesta*** se observan los pasos enunciados por el docente para la resolución de la actividad (se tuvo en cuenta la claridad , omisión de pasos o inclusión no pertinente de los mismos ) Si bien no era requisito para la evaluación presentar el desarrollo de la actividad – el mismo debía ser realizado en la computadora –, muchos docentes detallaron por escrito el procedimiento realizado. Se observó que en 7 de las evaluaciones este desarrollo fue poco claro ya sea omitiendo procedimientos necesarios o bien incluyendo procedimientos no pertinentes a la consigna.
5. En ***evaluaciones:*** se apunta a la detección de errores en la resolución de las mismas. Hubo 6 evaluaciones mal resueltas por las siguientes causas: *Errores en el campo disciplinar* (2 ) y *Errores por no respetar la "filosofía " del Cabri* ( 4 )
6. En el aspecto ***planteo de objetivos*** se analiza el grado de articulación entre las actividades realizadas y los objetivos propuestos. En algunas actividades se puntualizaron objetivos además de consignas, y se ha observado que en 3 de éstas los objetivos planteados no se logran desarrollando las actividades propuestas, es decir, no hay coherencia entre objetivo y actividad
7. En ***errores de ortografía y / o puntuación*** se alude, lógicamente, a las incorrecciones en la escritura de una palabra o en el uso de los signos ortográficos de puntuación. Estos tipos de errores se observaron en 4 evaluaciones.
8. En ***Originalidad de la actividad propuesta*** se observa la creatividad de los docentes a través de los ejercicios propuestos. Si bien hubo propuestas interesantes, se observó en general poca creatividad en los docentes para proponer actividades innovadoras o que pudieran resultar atractivas a los alumnos.

**Conclusiones del Análisis de las Evaluaciones**

De todos los elementos tenidos en cuenta para el análisis aparece claramente una cuestión de suma importancia: **cómo** aprende y **qué** aprende el alumno cuando el docente organiza una propuesta de trabajo que es confusa, que desatiende la "rigurosidad" propia de un lenguaje científico, que incluye pasos innecesarios o suprime los imprescindibles, que no expresa claramente en la consigna datos o procedimientos a seguir, y que persigue objetivos "reñidos" con la actividad.

Se deduce que la falta de precisión por parte del docente, o que una transposición inadecuada genera aprendizajes confusos y que el uso no riguroso del lenguaje matemático en el profesor provoca el uso "Libre" del mismo por parte del alumno (luego, usan términos que creen que son sinónimos y no lo son, y si los términos son palabras claves, cambian el significado del texto).

A esto suma el hecho de que el alumno, una vez que se acostumbra a esta imprecisión no puede superarla fácilmente cuando se enfrenta a un docente preciso y riguroso científicamente; en ese caso, el que fracasa es el alumno y no el docente que le enseñó así. Esto es altamente significativo y por lo tanto requiere de un profundo análisis por parte de los colegas docentes que les permita superar los conflictos para así mejorar su práctica docente.

**Reflexion Final**

Creemos que es básico detectar con precisión las causas del fracaso de un estudiante. La determinación de las mismas es el paso fundamental para avanzar hacia la resolución del problema. Igualmente, creemos que de la reflexión y el trabajo conjunto entre docentes de ambos niveles, el Medio y el Universitario, surgirán sin duda los aportes necesarios para mejorar la articulación.

Este trabajo se ha realizado en una muestra heterogénea, y aunque se ha abordado solo el tema Geometría, nos permite vislumbrar que vamos en el camino correcto hacia la confirmación de las hipótesis 1 y 2 planteadas al inicio del trabajo, en relación a la claridad y calidad de las propuestas de trabajo presentadas a los estudiantes.

**Referencias bibliográficas:**


- **Brousseau; et. al.**(1992). *Didáctica de la Matemática*. Ed. Aique
- **Best, J. W**. *Cómo investigar en educación*. Ed Morata. Madrid.
- **Santalo, L**. *Matemática II*. Ed. Kapeluz
- **Carione, N.; Carriaga, S.; et. al**. *Matemática III*. Ed. Santillana
- **Laboratorie de structures discretes et de didactique.** *Cabri– Géomètre User's Manual*. Versión 1.7 for MS–DOS
- **Bonomo, F; D'andrea, C.; Laplagne, S. y Szew, M**. *Explorando la geometría en los Clubes Cabri*

## UNA ALTERNATIVA EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

*Agostini, E. - Lasserre, A. - Naraskevicins, M. - Odstrcil, D. - Royo, J. - Torres Bugeau, C.*
*Universidad Nacional de Jujuy (Argentina)*

En 1995 abordamos la temática del fracaso escolar en Matemática desde las inferencias de nuestra experiencia docente enriquecidas por los resultados de una encuesta realizada a los ingresantes a distintas carreras de la UNJu y de un Instituto de Formación de Profesores en 1993 y del análisis de los exámenes de ingreso a la Fac. de Ingeniería (UNJu) en 1994.

El grupo de investigación, por su constitución con docentes de diferentes disciplinas y que desempeñan su práctica docente en distintos niveles del sistema educativo argentino, puede definirse como interdisciplinario.

Esta investigación se basó, en cuestiones que surgieron nítidamente del análisis de la mencionada encuesta y que condicionan fuertemente la formación del ingresante al nivel superior, tales como : preparación insuficiente, elemental e incompleta en Matemáticas. Reforzado, todo ello, por una didáctica tradicional basada en la concepción de un aprendizaje fundamentado en la práctica repetitiva y condicionante y en un escaso manejo de bibliografía por parte de los alumnos.

**Los objetivos de la investigación son:**

a.- Implementar estrategias de investigación-acción en una labor conjunta de equipo docente constituído por profesores de niveles distintos (medio y universitario). El docente de nivel medio pasa de ser "objeto" de investigación a ser "sujeto" que debe, ineludiblemente, modificarse como condición de cualquier cambio. Elegimos la metodología de investigación-acción en el sentido que la define J .W .Best :

> *"La investigación activa se enfoca sobre la aplicación inmediata,no en el desarrollo de la teoría ni respecto de una aplicación general. Ha situado su énfasis sobre un problema, aquí y ahora, en una situación localizada. Sus hallazgos han de ser evaluados en términos de aplicabilidad local, no en los de validez universal. Su propòsito es mejorar pràcticas escolares y, al mismo tiempo, a quienes intentan perfeccionar esas prácticas. El propósito de la investigación activa es combinar la objetividad, destreza en procesos investigativos, hábitos de pensamiento, aptitud para trabajar armoniosamente con otros y espìritu profesional"*

b.- Proyectar, implementar y evaluar nuevos modos de desempeño docente, que nos permitiesen modificar los resultados hasta ahora obtenidos en el aprendizaje de los estudiantes.

**La investigación:**

A raíz de lo observado en el relevamiento preliminar del problema, tomamos en consideración un campo que apareció como uno de los más deficitarios : la Geometría. Así, el objeto de investigación se circunscribió a la aplicación controlada de innovaciones didácticas, pensadas y trabajadas cooperativamente por docentes de nivel medio y universitario, en la enseñanza de la Geometría en Primer Año.

Como una vía alternativa que intentara superar la actual incapacidad para el manejo autónomo de la bibliografía matemática, propusimos la generación de situaciones didácticas, fundamentalmente centradas en la lectura individual (aunque guiada) y comprensivo-activa de guías de estudio especialmente elaboradas por el equipo docente para el tratamiento de los diferentes temas.

Tratamos así de quebrar esa especie de "facilismo" que entrampa a los alumnos en un modelo educativo sobreprotector y mecánico. Para ello modificamos el rol del profesor, centrado en el protagonismo que asume en el escenario del aula y en el que no queda lugar para el trabajo espontáneo y creativo de los estudiantes.

Así, dentro de los "materiales de enseñanza" trabajamos con "guías de estudio", entendiendo por tales, textos didácticos especialmente elaborados por el equipo de investigación para promover en circunstancias específicas, la lectura comprensivo-activa como vía de aprendizaje y de desarrollo de habilidades intelectuales.

En esta etapa del proceso, el rol del docente de nivel medio es de vital importancia debido a que se convierte en el mediador entre el equipo de investigación y los alumnos del nivel medio.

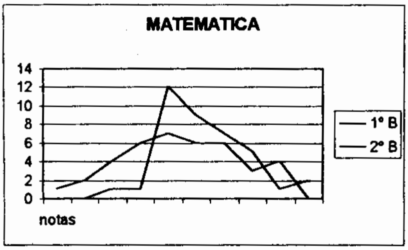
Se decidió, entonces, que aquellos profesores que tuvieran dos divisiones de 1° Año, aplicaran la propuesta en sólo uno de ellas, a fin de tomar el otro curso como grupo control. De esta forma, entendíamos nosotros, podríamos evaluar convenientemente la pertinencia de la guía. Así fue que se tomaron evaluaciones similares, tanto en los cursos en que aplicaba la intervención pedagógica como en aquellos que, siendo llevados por el mismo docente, no se aplicaba.

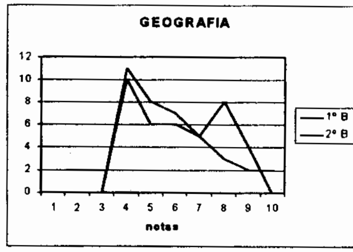
Todo el equipo tuvo a su cargo la tarea de seguimiento y evaluación de los resultados que se realizó a través de: observaciones de clase, relatorías de los docentes que aplicaron la propuesta, la evaluación de los alumnos y encuesta a los mismos

## Conclusiones

Tal como se puede apreciar con claridad en los siguientes gráficos, hubo una mejoría significativa en los alumnos que habían tenido rendimientos malos o muy malos en Matemática, antes de la aplicación de la propuesta. En los alumnos de rendimiento bueno o muy bueno, no se notó un aumento significativo en su rendimiento.

Por otra parte también se puede observar que los rendimientos de los alumnos Geografía, en el mismo período de tiempo, se mantuvieron estables o decrecieron. Esto se repitió en las otras asignaturas.




Al finalizar el Ciclo lectivo, los docentes entregaron un informe siguiendo las pautas indicadas por este equipo. Siguiendo ese esquema , los informes de los docentes pueden sintetizarse como sigue :

**1. Interpretación de texto**

- Dificultades en la interpretación y aplicación de los símbolos matemáticos.
- Temas que presentan dificultad en ser comprendidos: operaciones con segmentos y ángulos (Guía 2)

**2. Motivación**

- Manifestación de actitudes positivas frente al material entregado. Agrado por la pertenencia individual del mismo.
- Al principio se observó cierta resistencia al método por no estar habituados a trabajar solos sin contar con la exposición del profesor.
- Positiva en cuanto a los temas de Geometría. A los alumnos les agradaba el hecho de que los temas pudieran ser desarrollados por ellos mismos.

**3. Aplicación**

- Los docentes entienden que la ejercitación fue adecuada pero insuficiente, por que se desdibujaba la fase de fijación..
- Hubo dificultad en la resolución de problemas de operaciones con segmentos y ángulos que fueron los temas de difícil comprensión.

**4. Evaluaciones**

- Se trabaja bien el cuadernillo pero no hay fijación lo que trajo problemas a la hora de las evaluaciones
- Se obtuvieron mejores resultados cuando hubo elaboración de síntesis y refuerzo en la ejercitación por parte del profesor

**5. Sobre la guía**

No deberían figurar todas las respuesta porque se favorece el facilismo del alumno. (Inferimos de la observación realizada por los docentes de este equipo que esta es una dificultad crítica para la evaluación de las guías. Los alumnos deberán tener un adiestramiento previo de manejo de estudio independiente y vivenciar sus ventajas).

- Los contenidos son los correctos

El análisis de las encuestas realizadas a los estudiantes arrojó los siguientes datos : el 50% de los encuestados consideró agradable el trabajo con las guías , el 30% lo encontró más o menos agradable y al 20% restante no les gustó.

La actitud positiva de los primeros tuvo que ver en algunos casos con el tipo de trabajo propuesto y en otros con los temas desarrollados :

- *"Los temas de ángulo y plano fueron muy buenos"*
- *"Se aprende mejor"*
- *"Los ejercicios son fáciles"*
- *"Es muy entretenido y ayuda a entender"*

Esta actitud positiva frente a la propuesta se refuerza con expresiones como :

- *"Me gustaría tener una guía igual"*
- *"¡Me gusta ! Gracias por dármela !"*
- *"Me pareció re-genial"* Firma : *"No miento"*
- *"Sigan así"*

Los alumnos del segundo grupo relacionan su respuesta con el grado de dificultad que tuvieron. Se expresaron así :

- *"Me confundieron algunos gráficos"*
- *" No entendía bien las preguntas"*
- *"Usan un tipo de lengua...."*
- *"Tenía palabras raras"*
- *"Palabras complejas"*

Valdría la pena en estos casos, indagar si lo realmente dificultoso es el problema matemático en sí o si lo que más les cuesta a los alumnos es el lenguaje matemático formal, sus códigos y simbolismos.

Finalmente, el 20% restante se divide en dos tipos : aquellos que la encuentran incompleta (8%) y aquellos a quienes directamente no les sirvió :

- *"Porque la guía es muy resumida"*
- *"Los libros explican mejor"*
- *"No entendía nada. Palabras muy difíciles"*

**Reflexiones finales**

a) Según lo expresado por los mismos docentes, la metodología propuesta insume más tiempo que la enseñanza tradicional. En este sentido debemos preguntarnos si el factor tiempo es evaluado como variable independiente en relación a la cantidad de contenidos o en relación a la mejora del alumno.

b) En el análisis realizado a las evaluaciones de los alumnos se puso de manifiesto que no había mayores diferencias entre los resultados de los Cursos en los cuales se había usado la guía con respecto a aquellos en que no había sido usada. Pero esta circunstancia no nos permite inferir que la guía no es adecuada a los propósitos de mejorar el rendimiento de los alumnos, ya que los docentes manifestaron que, a pesar de no tener los cuadernillos para el grupo control, ellos habían seguido con esos alumnos secuencias similares y ejercitaciones idénticas a las de las guías.

Durante 1997 se realizaron los ajustes necesarios a los fines de superar las dificultades encontradas en la primera aplicación del método. En este momento, en la etapa final de este proyecto, estamos evaluando los resultados obtenidos en la 2° aplicación.

Sin embargo estamos en condiciones de afirmar, como eje central de nuestra experiencia, que el trabajo conjunto e integrado entre docentes de distintos niveles fue altamente positivo ya que implicó poner a prueba la capacidad de los propios docentes para modificar sus conductas profesionales. Modificaciones que realizaron incentivados por el reconocimiento de sus competencias y por la promoción del trabajo en equipo como vía de circulación y aprovechamiento de los saberes que cada profesor poseía individualmente.

Por otra parte los docentes universitarios involucrados en la experiencia pudieron enriquecer sus saberes teóricos con la práctica de matemática educativa en el nivel medio.

**Referencias bibliográficas:**


- **Gentile, E**. (1992). *Aritmética elemental en la Formación Matemática*. Prólogo- OMA
- **Pimm, D**. (1986). *El lenguaje matemático en el aula*.
- **Brousseau, et. al**. (1992). *Didáctica de la Matemática*. Aique.
- **Best, J**. *Cómo investigar en educación*. De.Morata-Madrid

# PENSAMIENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

## E B A: ¿QUÉ ES? ¿PARA QUÉ SIRVE? ¿CÓMO PUEDE APOYAR AL PROFESOR?

*María José Marques Dos Santos, Antonio Valencia Hernández,*
*Teresa Guerra Dávila y María Del Carmen Galindo de Santiago.*
*Facultad de Estudios Superiores. ZARAGOZA- U.N.A.M. Campus II. México*
*marques@servidor.unam.mx*
*avh@servidor.unam.mx*
*tguerra@servidor.unam.mx*

**Resumen:**

En este taller se pretende poner a disposición de los profesores del área de probabilidad y estadística una herramienta útil para apoyar la enseñanza en forma activa que permite que el alumno participe en el proceso y trabaje en forma más amena, adquiera los conocimientos con mayor facilidad porque en caso de no comprender en el momento el tema trabajado, siempre podrá repetir el proceso las veces que sea necesario dado que el programa lo permite. Este programa es un tutorial que se ha estado elaborando durante tres como iniciativa de profesores de estadística para tratar de motivar el aprendizaje de una asignatura con alto índice de reprobación. A la fecha, el programa está terminado y cubre casi todo el curso de Bioestadística que se imparte en la F.E.S. Zaragoza-UNAM para las carreras del área Químico-Biológica.

Se ha venido trabajando con este programa a través de cuatro semestres y aunque el rendimiento no ha cambiado drásticamente la motivación ha mejorado. Debe aclararse que al inicio se trabajó con grupos piloto y solamente con dos unidades (Distribuciones y Estadística Inferencial) que eran las únicas concluidas.

Los módulos o capítulos que incluye son: (1) Distribuciones de Probabilidad, (2) Estadística Descriptiva, (3) Diagramas de Tallo y Hoja, (4) Estadística Inferencial, (5) Análisis de Varianza, (6) Análisis de Regresión y de Correlación lineal y Regresión Curvilínea, (7) Análisis de Regresión Resistente y (8) ¿Qué hacer con un lote de datos?

En el paquete EBA — **Estadística Básica Aplicada** — se exponen conceptos teóricos, se dan ejemplos y se proponen ejercicios. Este tutorial se puede enlazar con cualquier paquete estadístico comercial (Statgraphics, Stata, Minitab, etc.) para realizar con ellos los cálculos que sean necesarios para el análisis.

### Justificación

En la F.E.S. Zaragoza, todos los planes de estudio de las carreras del área de Ciencias Químico Biológicas (Biología, Ingeniería Química y Química Farmacéutico Biológica) tienen un tronco común constituido por los tres primeros semestres y, la Estadística es parte de este tronco. A través del tiempo se ha observado que los pre-requisitos con los que cuentan los estudiantes al ingresar a la Facultad son deficientes, el índice de reprobación es alto y existe una falta de motivación de los alumnos hacia la materia, porque los alumnos tienen dificultades para comprender la aplicación y la importancia de esta asignatura en su desarrollo profesional. Con objeto de hacer frente a esta problemática y abatir este índice se está desarrollando un programa interactivo para el aprendizaje de la Estadística, esperando que el uso del mismo repercuta en el rendimiento y en la motivación

## Objetivos

- Motivar al alumno en el aprendizaje de la Estadística.
- Fomentar la integración teórico-práctica del curso.
- Generar habilidades para el manejo de los datos estadísticos.
- Incrementar el rendimiento en la materia

## Metodología

***Primera Etapa:***

- Selección e instalación de paquete estadístico.
- Selección de ejercicios apropiados para el trabajo en computadora de acuerdo con el programa del curso.
- Selección de grupo piloto para trabajo en computadora.
- Trabajo con el grupo usando la computadora en horario adicional (2 horas por semana).
- Evaluación por comparación de grupo piloto contra grupo normal.

***Segunda Etapa:***

- Búsqueda, recopilación e integración de información para generar el texto base.
- Elaboración de un programa de enlace para darle continuidad a la lectura del texto computarizado y para conectarlo con el paquete estadístico.
- Selección de grupos piloto para trabajar los ejercicios con computadora con apoyo del texto computarizado.
- Aplicación del programa en horario adicional (2 horas por semana).
- Evaluación, comparando los grupos piloto con grupos normales.

***Tercera Etapa:***

- Elaboración de fichas con información relevante obtenida del texto base.
- Elaboración e integración de las fichas en unidades temáticas.
- Elaboración del programa maestro por menúes para enlazar las fichas e integrarlas al paquete estadístico comercial.
- Uso del programa interactivo con dos grupos en horario adicional (2 horas por semana).
- Evaluación del aprendizaje en estadística, de los estudiantes que utilizarán este programa como una estrategia de motivación que redundaría en el incremento del rendimiento escolar

## Capítulos que lo integran

- Distribuciones de Probabilidad

- Estadística Descriptiva
- Diagramas de Tallo y Hoja y Diagramas de Caja
- Estadística Inferencial
- Análisis de Varianza
- Regresión y Correlación Lineal Simple y Regresión Curvilínea
- Regresión Resistente
- ¿Qué hacer con un lote de datos.

**Resultados**

**Primera etapa:**

- Se trabajó con un grupo de 33 alumnos, asesorados por el mismo profesor y todos fueron evaluados con los mismos exámenes. El grupo se dividió de acuerdo a la disponibilidad de horario en dos subgrupos. Un subgrupo de 13 alumnos, que además del curso normal llevó 2 horas adicionales de cómputo. Los 20 restantes sólo llevaron el curso teórico-práctico normal y de éstos aprobaron 8 (40%). De los 13 que llevaron cómputo también aprobaron 8 (61.54%). La información se resume en la siguiente tabla.

| *Grupo* | *Aprobados* | *Reprobados* | *% de aprobados* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| Con cómputo | 8 | 5 | 61.54 | 13 |
| Sin cómputo | 8 | 12 | 40.00 | 20 |
| Total | 16 | 17 | 48.48 | 33 |

Cabe aclarar que estos resultados no son estadísticamente significativos usando la prueba de independencia $\chi^2$ , p = 0.3935 , ni usando la prueba z para proporciones con = 0.10. Con la Prueba Exacta de Fisher, p = 0.2960

**Segunda etapa:**

Se utilizaron 6 grupos, 2 de ellos llevaron cómputo y 4 no. Se observó que la formación dos bloques, uno constituido por los grupos 1301 y 1304 que presentaron una mediana mayor, es decir, el 50% de los alumnos obtuvieron una calificación mayor o igual a 62. El segundo bloque está formado por los grupos 1302, 1303, 1351 y 1353 en los cuales el 75% o más, tienen una calificación inferior a 54 puntos.

- Para analizar estadísticamente los resultados, se trabajó con una prueba Ji-cuadrada de independencia del factor aprobación-reprobación con relación al factor con-sin cómputo, con el estadístico corregido por Yates se comprobó que existe alta dependencia entre estos dos factores.

| *Bloque* | *Aprobados* | *Reprobados* | *% de aprobados* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| *Con cómputo* | 27 | 25 | 52% | 52 |
| *Sin Cómputo* | 15 | 86 | 15% | 101 |
| *Total* | 42 | 111 | 27% | 153 |

Estos resultados son estadísticamente significativos usando la prueba de independencia $\chi^2$, p = 0.0000

**Tercera etapa**

- Se probaron los capítulos ya integrados con dos grupos en dos horas adicionales, obteniéndose los siguientes resultados:

| *Bloque* | *Aprobados* | *Reprobados* | *% de aprobados* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| *Con cómputo* | 14 | 22 | 39% | 36 |
| *Sin Cómputo* | 23 | 83 | 22% | 106 |
| *Total* | 37 | 105 | 26% | 153 |

Estos resultados no son estadísticamente significativos usando la prueba de independencia, $\chi^2$ corregida por Yates ya que $p = 0.0702171$.

**Discusión**

No se ha logrado trabajar con todos los grupos que llevan estadística debido a que no ha sido posible incorporar 2 horas adicionales en el plan de estudios de cada una de las carreras para cómputo, de otra manera se tendría que acortar el programa para incorporar dos horas a cómputo.

Los resultados de la primera etapa muestran que las sesiones de cómputo no influyeron de manera importante en la aprobación del curso de estadística, debido a que fue un grupo reducido por la falta de equipo y porque los alumnos que tomaron este curso fueron aquellos que tenían disponibilidad de horario y no fueron elegidos al azar.

Para la segunda etapa se observa cierta tendencia de los grupos que llevaron cómputo hacia una mayor aprobación. Sin embargo, no se considera que el índice de aprobación haya mejorado, como lo muestran los resultados, debido a la participación en las clases de cómputo, sino más bien a la más constante asistencia a clase, favorecida por la motivación hacia el manejo de la computadora.

A pesar de lo anterior se consideró conveniente establecer una tercera etapa donde la información manejada por medio de pantallas permitiera la consulta rápida de conceptos teóricos de manera simultánea al uso del paquete estadístico comercial con el fin de facilitar el trabajo en el taller de estadística, así como proporcionar al alumno los medios para acceder a este tipo de tutoriales utilizando para este fin tecnología de vanguardia lo cual redundará en un mejor desarrollo académico a lo largo de su carrera. En la tercera etapa, no se lograron resultados estadísticamente significativos, aunque se ve que hay un 39% de aprobados de los que asistieron a cómputo contra un 22% de los que no asistieron.

**Conclusiones**

Se ha observado que los esfuerzos por proporcionar a los alumnos herramientas para motivarlos hacia el aprendizaje de la estadística no han permitido abatir los índices de reprobación de la materia. Sin embargo el programa maestro puede usarse alternativamente como tutorial para alumnos que la cursan, que desarrollan proyectos de servicio social, tesis, etc. que requieren análisis estadístico.

Se ha observado un cambio de actitud del alumno hacia la materia puesto que los conceptos teóricos puede aplicarlos a problemas reales con ayuda de la computadora teniendo oportunidad de dar una interpretación de los resultados en lugar de consumir tiempo en la manipulación de los datos, lo que constituye una motivación a cursar la materia.

**Referencias bibliográficas:**


- **Devore, J., & Peck, R..** (1993) *Statistics: The Exploration Analysis of Data.*, 2nd. ed. Duxbury, U.S.A.
- **Hamilton, L.** (1990), *Modern Data Analysis, A first Course in Applied Statistics*, Brooks/Cole Publishing Company, U. S. A.
- **Hoaglin, D., Mosteller, F. & Tukey, J.** (1983), *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., U.S.A.
- **Marques de Cantú, M. J.** (1991), *Probabilidad y Estadística para Ciencias Químico Biológicas*, McGraw-Hill, México.
- ( 1997). *NeoBook Users Guide*, NeoSoft Corp. Oregon, U.S.A.

# USO
# DE
# TECNOLOGÍA

## ENTRENANDO CON MULTIMEDIA EN PC.
## SISTEMAS TUTORIALES PARA LA MATEMATICA Y EL CALCULO

*Francisco A. Fernández Nodarse*
*Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente, Cuba, Email: cdisac@ceniai.cu*
*Sylvia Lima Montenegro*
*Facultad de Ciencias, Universidad Pedagógica de la Habana*

**Abstract**

El trabajo analiza la tecnología empleada en el campo educacional y su tendencia, describe un modelo combinado para el diseño de un curso y un modelo de tutoriales orientado a computadoras personales. En la investigación se emplearon los métodos de carácter histórico -lógico, de análisis y síntesis, de inducción -deducción, y de carácter empírico para sustentar aspectos teóricos. Se describen algunas aplicaciones y analizan las experiencias de los autores en el desarrollo de sistemas tutoriales para la enseñanza de la matemática y el cálculo en computadoras personales sobre Windows con el uso de los recursos que brinda la hipermedia inteligente con estructura típica de libro electrónico multimedia. Las conclusiones recogen los resultados obtenidos con el empleo de estas tecnologías.

### I.- Introducción

La introducción de nuevas tecnologías informáticas ha enriquecido y revolucionado su enfoque en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Partiendo del análisis de la tecnología empleada y su tendencia, el trabajo describe un modelo combinado para el diseño de un curso y un modelo de tutoriales orientado a computadoras personales. Se desarrolló en un marco teórico que combinó la enseñanza orientada a problemas con la construcción del conocimiento. En la selección de los métodos se tuvo en cuenta los objetivos y tareas de la investigación y se incluyeron los de carácter histórico -lógico, de análisis y síntesis, de inducción -deducción, y de carácter empírico para sustentar aspectos teóricos que abarcaron entrevistas y encuestas estadísticas. Tomamos como base los resultados las investigaciones pedagógicas realizadas sobre las dificultades en Matemáticas que presentan los estudiantes de nivel medio que optan por ingresar en carreras universitarias y sus programas de estudio. Abarcó la realización de 4 temas centrales que fueron defendidos como trabajos de Maestría en Informática Educativa: preparación para los exámenes de ingreso, introducción al Calculo Diferencial Integral, Estadística paramétrica y Estadística no paramétrica.

El panorama de la tecnología en el campo de la educación [1,2,3] tiende a caracterizarse por microcomputadoras multimedias; juegos educacionales y paquetes de instrucción ampliamente diseminados; libros electrónicos; redes de microcomputadoras; uso escolar de sistemas de aprendizaje abiertos; diseño de un modelo activo con varias actividades de aprendizaje y observación del progreso via la simulación por computadora; individualización: énfasis en el análisis conceptual, de los objetivos cognoscitivos, fuzzy y de la actividad; y el empleo de técnicas de aprendizaje rápido. Combinando las técnicas de SE con la de hipertexto [4] pueden construirse sistemas expertextos que combinan tanto el poder intuitivo de los sistemas hipertextos con la potencialidad formal de los SE. La navegación por el hipertexto puede ser ejecutada utilizando una máquina de inferencia para construir caminos en el hipertexto en respuesta a las consultas de los usuarios.

**II.- Modelos para el diseño del contenido de un curso y tutoriales**

El sistema necesita tener una comprensión del estado del usuario; una idea acerca de qué tipo de respuesta o capacidad de sistema es apropiada; un modelo del usuario, incluyendo objetivos, intenciones y experiencia; una descripción de la situación que el usuario está enfrentando y el conocimiento del usuario acerca de ello; y una hipótesis acerca de qué tipo de modo de diálogo es apropiado. Finalmente el sistema pudiera necesitar explicar esta operación al usuario. Uno de los modelos para el diseño del contenido de un curso combina tres componentes fundamentales: exposición, red de preguntas y monitor de solución de problemas. El modelo para tutoriales empleado incluye además: el administrador del aprendizaje, el generador del aprendizaje, la estrategia de aprendizaje, el modelo del estudiante y historia o perfil del estudiante.

En un sistema tutorial de enseñanza se necesita representar el conocimiento y modelar tal estructura siguiendo los principios y estrategias de desarrollo de hipertextos. El empleo de modelos de redes semánticas de representación del conocimiento es una alternativa de solución que empleamos. Las estructuras hipertextuales combinaron nodos encadenados, hipertexto estructurado e hipertexto jerarquizado. Para diseñar cursos y sistemas textuales consistentes con una representación del conocimiento es necesario establecer el sistema de representación. El modelo más aceptado es el de redes estructuradas activas compuesta por nodos y arcos según relaciones de niveles que los conectan. Los nodos son instancias de estructuras proposicionales o símbolos de instancias de conceptos. Una total aplicación de los principios de aprendizaje/ enseñanza en redes para planear cursos integra la estructura de la materia con la red semántica del estudiante. Un principio teórico para el diseño del hipertexto fue la hipótesis de aprendizaje generativo. Los mapas conceptuales elaborados son un desarrollo de la teoría postpiagetiana en el ámbito de la teoría de asimilación.

**III.- Sistemas tutoriales para la matemática y el cálculo**

Los proyectos, que deben evolucionar desde un libro con carácter multimedia e hipermedia hacia un libro intelectual [2,3,5], son:.

- **Tutorial de Matemáticas para la enseñanza media.**

Destinado a estudiantes de nivel medio contiene los conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas, y métodos de resolución de problemas que se incluyen en los cursos de Matemáticas. Puede servir como guía, en el repaso y en la sistematización de los conocimientos y cuenta con una colección de más de 700 ejercicios graduados precedidos de ejemplos. Hace énfasis en las operaciones aritméticas con números reales, el trabajo con variables, funciones, ecuaciones, trigonometría y Geometría.

**- Tutorial Introductorio al Análisis Matemático y el Cálculo.**

Similar al anterior con un programa del curso está enfocado al cálculo diferencial e integral aplicado a la Física. Los objetivos generales pueden resumirse en que los estudiantes se familiaricen y empleen procesos infinitos; adquieran las bases intuitivas y las ideas fundamentales del límite, la derivada y la integral; las apliquen en la resolución de problemas físicos; aborden problemas de variabilidad a través del cálculo y utilicen la geometría para visualizarlo.

**- Tutorial de Estadística descriptiva y no paramétrica**

Incluye más de 170 ejemplos y ejercicios, una calculadora electrónica y abarca los contenidos básicos de Estadística descriptiva y no paramétrica. Dirigido a usuarios de nivel medio y superior con un enfoque eminentemente práctico orientado a la solución de problemas.

Estos tutoriales están concebidos de la siguiente forma:

- un juego de temarios para el diagnóstico del estado del estudiante, que es accesible en cualquier momento. Los resultados de estos diagnósticos son empleados en la navegación inteligente.
- los textos, gráficos y ejemplos de solución de problemas tipo y ejercicios en cada capítulo.
- la navegación inteligente tiene carácter opcional, es decir, en última instancia es el alumno quien decide la próxima acción a realizar.

El diseño educacional abarcó el análisis del plan de estudio, del desarrollo del escenario y la relación interactiva teniendo en cuenta los fundamentos de la disciplina, sus objetivos generales instructivos, los contenidos y las indicaciones metodológicas, así como la selección de los medios de programación del elaborador.

Estas aplicaciones sobre Windows 3.1 o superior fueron desarrolladas utilizando lenguaje "C", el ACCESS, el sistema de autor Toolbook para computadoras personales con el uso de los recursos que brinda la multimedia y poseen estructura típica de libro electrónico multimedia con características tutoriales y elementos de navegación inteligente.

**IV.- Conclusiones**

La utilización de la multimedia y la hipermedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y el cálculo en particular enriquecen las herramientas audiovisuales a disposición del educador, mientras que la inclusión de herramientas inteligentes con incidencia en navegación, permiten individualizar aun más dicho proceso. Estos estudios nos confirmaron los beneficios que incluyen el coste reducido, la consistencia instructiva, el incremento de la retención, el aumento de la motivación, el acceso generalizado, mayor individualización, reducción del tiempo y la flexibilidad de los periodos de formación. Esta herramienta debe ser utilizada en correspondencia a las características del grupo de usuarios a quien va dirigida.

**Referencias bibliográficas:**


- **Erickson, F.**(1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.Wittrock ( Ed .) *Handbook of research on teaching* (3rd ed.) New York: Macmillan.
- **Fernández, F**. (1996) Sistemas de entrenamiento para computadoras personales. Experiencias en su desarrollo. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*, Barranquilla, Colombia, 8 -11 de julio de 1996.
- **Fernández, F**. (1966) "Entrenando con multimedia en PC. Sistemas tutoriales para la Matematica y el Calculo", *Memorias del II Taller Internacional sobre enseñanza de la Matematica para ingenieria y arquitectura*, ISPJAE, La Habana, 25 al 29 de noviembre de 1996, pag 104-109, Memorias del Evento científico Internacional COMPAC'96, CEDISAC, CITMA, 17 al 19 de diciembre de 1996, La Habana, ISBN 959 - 237- 024 - 9, pag. 135- 138.
- **Rada, R**. (1991) *Hypertext: from text to expertext*. McGraw Hill. England, 215p.
- **Fernández, F**. (1996) . Entrenando en PC Multimedia, Comunicaciones Breves del *8vo. Congreso Internacional de Educación Matemática ICME* 8, Sevilla, Pag 654.

## Los ambientes computacionales en el aprendizaje de la matemática

*Francisco A. Fernández Nodarse, Sylvia Lima Montenegro, Esteban Egaña Morales,*
*Rogelio Ferrer Carratalá, José Caluyna Pedro y Gisela San Juan*
*ISPEJ Varona, Ciudad Libertad, Marianao*
*Carlos Mastrascusa Soler, José S. Izquierdo Roque y Pablo Abreu Rogert*
*Escuela Interarmas de las FAR Gral. Antonio Maceo, Caimito*

### I.- Introducción.

El uso de las nuevas tecnologías computacionales en la enseñanza de las matemáticas es una realidad que día a día cobra más fuerza. Esto permite al estudiante explorar, inferir hacer conjeturas, justificar, poner a prueba argumentos y de esta forma construir su propio conocimiento. El panorama de la tecnología en el campo de la educación tiende a caracterizarse por microcomputadoras multimedias; juegos educacionales y paquetes de instrucción ampliamente diseminados; libros electrónicos; redes de microcomputadoras; uso escolar de sistemas de aprendizaje abiertos; diseño de un modelo activo con varias actividades de aprendizaje y observación del progreso vía la simulación por computadora; individualización: énfasis en el análisis conceptual, de los objetivos cognoscitivos, fuzzy y de la actividad; y el empleo de técnicas de aprendizaje rápido. Combinando las técnicas de SE con la de hipertexto pueden construirse sistemas expertextos que combinan tanto el poder intuitivo de los sistemas hipertextos con la potencialidad formal de los SE. La navegación por el hipertexto puede ser ejecutada utilizando una máquina de inferencia para construir caminos en el hipertexto en respuesta a las consultas de los usuarios.

En la nueva estructuración de la educación las disciplinas están íntimamente relacionadas, por lo que Informática y Matemática ocupan un espacio de formación altamente significativa que exige la preparación y actualización técnica, pedagógica y científica específica del docente que debe cumplimentar las nuevas exigencias del momento. Hoy día recursos como los asistentes matemáticos, la Internet, tutoriales, micromundos computacionales, tutoriales inteligentes y hipermedia unido a los medios audiovisuales obligan al profesor a concentrarse en un nuevo papel, el de estimulador y orientador del aprendizaje apoyado con gráficos en varios colores, tridimensionales, trazados en segundos, como respuesta a un simple comando en la pantalla de una computadora. Evidentemente esto está ligado a las teorías del aprendizaje que actualmente encontramos en el contexto de la informática educativa dado que el proceso de aprendizaje como fenómeno subjetivo puede ser abordado desde diferentes ópticas y es altamente complejo. Aquí el maestro se convierte en un facilitador que explora el conocimiento previo de los estudiantes y proporciona un ambiente adecuado para que el estudiante construya su propio conocimiento. El estudiante, por su parte, interactua con el objeto de aprendizaje para lograr su objetivo. La tarea del profesor bajo estas situaciones será diseñar y presentar situaciones que apelando a las estructuras anteriores que el estudiante dispone, le permita asimilar y acomodar nuevos significados. Este nuevo rol, exige una actividad mayor de parte del educador, pues es necesaria una constante creatividad de parte de éste.

Los planes y programas de estudio señalan como propósitos fundamentales para los cursos de matemáticas, desarrollar en los estudiantes habilidades y conocimientos para adquirir un pensamiento crítico, reflexivo, flexible, capaz de realizar generalizaciones, clasificar, inducir, inferir, estimar numéricamente, y resolver problemas. Las actividades y recursos didácticos de uso generalizado en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han proporcionado resultados poco satisfactorios, los diagnósticos muestran que el aprendizaje de los estudiantes es principalmente de tipo algorítmico, con escaso aprendizaje de los aspectos conceptuales y de aplicación. Para algunos esto es resultado de una enseñanza que utiliza poco la visualización y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos, así como de las dificultades que se presentan para vincular cognitivamente aspectos gráfico-visuales y analítico-algorítmicos relacionados con ellos.

En este trabajo nos concentraremos en la estructuración de clases con el empleo de asistentes matemáticos y de una colección de tutoriales para la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas que desarrollamos a tal efecto orientados al trabajo en un ambiente de red. Fueron elaborados en un marco teórico que combinó la enseñanza orientada a problemas con la construcción del conocimiento. En la selección de los métodos se tuvo en cuenta los objetivos y tareas de la investigación y se incluyeron los de carácter histórico -lógico, de análisis y síntesis, de inducción - deducción, y de carácter empírico para sustentar aspectos teóricos que abarcaron entrevistas y encuestas estadísticas. Tomamos como base los resultados las investigaciones pedagógicas realizadas sobre las dificultades en Matemáticas que presentan los estudiantes de nivel medio que optan por ingresar en carreras universitarias y sus programas de estudio. Abarcó 4 temas centrales que fueron defendidos como trabajos de Maestría en Informática Educativa: preparación para los exámenes de ingreso, introducción al Calculo Diferencial Integral, Estadística descriptiva y Estadística no paramétrica.

## II.- Estructuración de clases con el empleo de asistentes matemáticos

Las experiencias llevadas a cabo por nuestro grupo de investigación durante varios años han estado encaminadas al desarrollo de trabajos investigativos relacionados con la introducción de los ambientes computacionales en la enseñanza de la matemática, esto nos permite describirle algunos de los resultados alcanzados en un grupo de trabajos científicos estudiantiles de alumnos que se especializan como profesores de Matemática-Computación y de tesistas de la Maestría de Informática Educativa en los que abordan un rediseño de la enseñanza de la Matemática con el uso combinado de varias herramientas de la computación, en particular con los asistentes matemáticos y estadísticos tales como el "Derive", Cabri-Geometry, Mathematica, Modelus, Statistica, Maple, etc puede mejorar los resultados alcanzados con la metodología tradicional. Esta ha dado lugar al desarrollo de algunos sistemas de clases computarizadas en temas de Matemática en la enseñanza media y superior y en las asignaturas de Algebra, Análisis Matemático, Estadística y Matemática Numérica que son validadas desde el punto de vista metodológico actualmente y que combinan las herramientas computacionales antes señaladas y en cuyo diseño y elaboración hemos trabajado. Para la elaboración de la propuesta meteorológica de los sistemas de clases se cumplieron las siguientes etapas:

*Análisis de necesidades educativas.* En esta etapa debíamos: detectar problemas educativos, establecer prioridades para solucionar, analizar alternativas de solución y establecer el papel de la computadora en la solución. Para realizar esta etapa se diseñaron encuestas a profesores y estudiantes en diferentes asignaturas y niveles de enseñanza, para detectar en cada una temas en los cursos susceptibles de apoyar con informática.

*Selección del software matemático a utilizar.*- Una vez identificados los temas debíamos definir el soporte computacional a utilizar. Este fue un punto ampliamente discutido en el grupo. Finalmente decidimos trabajar con diferentes paquetes matemáticos en dependencia de las necesidades del tema abordado.

*Diseño de los trabajos científicos a realizar.-* Un estándar que establecimos en el diseño de los trabajos es que tuvieran una estructura común, teniendo en cuenta la estructuración metodológica del contenido a tratar y el sistema de clases a desarrollar, así como las orientaciones necesarias a estudiantes y profesores en dependencia del tipo de clase planificada. Incluyendo las actividades a realizar en la computadora con su respectiva hoja de trabajo.

*Desarrollo de los trabajos.-* Para el desarrollo de los trabajos contamos con la colaboración de especialistas en cada materia a realizar el sistema de clases computarizadas y con estudiantes de últimos años de la carrera profesoral de matemática - computación para los cuales constituyó este trabajo su tesis de diplomado y algunos tesistas de la maestría de informática educativa en la mención enseñanza de la matemática con ayuda de la informática. Este desarrollo contó con la asesoría educativa permanente de los miembros del grupo. Los sistemas de clases fueron desarrollados para para plataforma DOS y/o Windows.

*Validación de los trabajos.-* Desde finales del año 1995 se realizaron las validaciones de los primeros sistemas de clases y tareas con el asistente matemático Derive y Statistica para la impartición de algunos contenidos matemáticos para estudiantes de la especialidad y para estudiantes de la especialidad de física. En este curso se realiza la experiencia en estudiantes de preuniversitarios vocacionales de 10mo grado. Además se seleccionaron algunos profesores y estudiantes con el fin de que evaluaran las clases diseñadas y el sistema de tareas concebido.

Los temas abordados con la utilizacion de asistentes matemáticos son: trigonometría, funciones elementales, propiedades y gráficos (en la enseñanza media y superior), curvas de segundo orden. Movimientos en 2D, discusión de sistemas con parámetros, elementos de Estadística, métodos numéricos, cálculo diferencial e integral, límite de sucesiones y funciones, y ecuaciones diferenciales ordinarias.

**III.- Colección de tutoriales para la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas**

Los asistentes matemáticos brindan amplias posibilidades para la ejercitación y elaboración de conceptos, pero adolecen en general de pocas explicaciones teóricas y una insuficiente estrategia pedagógica para el estudio o recapitulación de los conceptos objeto de estudio. Es en este espacio en que se enmarca el empleo de los sistemas tutoriales que constituyen un necesario complemento del asistente dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje cuyo uso puede ser paralelo y combinado.

El sistema tutorial necesita tener una comprensión del estado del usuario; una idea acerca de qué tipo de respuesta o capacidad de sistema es apropiada; un modelo del usuario, incluyendo objetivos, intenciones y experiencia; una descripción de la situación que el usuario está enfrentando y el conocimiento del usuario acerca de ello; y una hipótesis acerca de qué tipo de modo de diálogo es apropiado. Finalmente el sistema pudiera necesitar explicar esta operación al usuario. Uno de los modelos para el diseño del contenido de un curso combina tres componentes fundamentales: exposición, red de preguntas y monitor de solución de problemas. El modelo para tutoriales empleado incluye además: el administrador del aprendizaje, el generador del aprendizaje, la estrategia de aprendizaje, el modelo del estudiante y historia o perfil del estudiante. De igual forma el profesor en un ambiente de red local necesita tener información sobre los contenidos consultados y los resultados del aprendizaje.

En un sistema tutorial de enseñanza se necesita representar el conocimiento y modelar tal estructura siguiendo los principios y estrategias de desarrollo de hipertextos. El empleo de modelos de redes semánticas de representación del conocimiento es una alternativa de solución que empleamos. Las estructuras hipertextuales combinaron nodos encadenados, hipertexto estructurado e hipertexto jerarquizado. Para diseñar cursos y sistemas textuales consistentes con una representación del conocimiento es necesario establecer el sistema de representación. El modelo más aceptado es el de redes estructuradas activas compuesta por nodos y arcos según relaciones de niveles que los conectan. Los nodos son instancias de estructuras proposicionales o símbolos de instancias de conceptos. Una total aplicación de los principios de aprendizaje/ enseñanza en redes para planear cursos integra la estructura de la materia con la red semántica del estudiante. Un principio teórico para el diseño del hipertexto fue la hipótesis de aprendizaje generativo. Los mapas conceptuales elaborados son un desarrollo de la teoría postpiagetiana en el ámbito de la teoría de asimilación.

**Sistemas tutoriales para la Matemática y la Estadística**

Estos sistemas para la enseñanza -aprendizaje, que constituyen una colección de libros con carácter multimedia e hipermedia que han evolucionado hacia un libro intelectual [2,3,5], son:

**Tutorial de Matemáticas para la enseñanza media (Prematic)**

Destinado a estudiantes de nivel medio contiene los conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas, y métodos de resolución de problemas que se incluyen en los cursos de Matemáticas. Puede servir como guía, en el repaso y en la sistematización de los conocimientos y cuenta con una colección de más de 700 ejercicios graduados precedidos de ejemplos. Hace énfasis en las operaciones aritméticas con números reales, el trabajo con variables, funciones, ecuaciones, trigonometría y Geometría. Ver fig. 1.

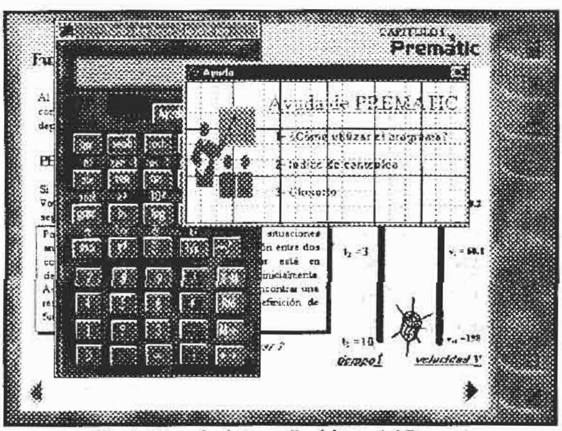



*Fig. 1 Ejemplo de pantalla del tutorial Prematic*

**Tutorial de Análisis Matemático y el Cálculo (Calculus)**

Similar al anterior con un programa del curso está enfocado al cálculo diferencial e integral aplicado a la Física. Incluye un capítulo dedicado a la Matemática Numérica. Los objetivos generales pueden resumirse en que los estudiantes se familiaricen y empleen procesos infinitos; adquieran las bases intuitivas y las ideas fundamentales del límite, la derivada y la integral; las apliquen en la resolución de problemas físicos; aborden problemas de variabilidad a través del cálculo y utilicen la geometría para visualizarlo

**Tutorial de Estadística descriptiva y no paramétrica (Estadis)**

Incluye más de 130 ejemplos y ejercicios, una calculadora electrónica y abarca los contenidos básicos de Estadística descriptiva y no paramétrica. Dirigido a usuarios de nivel medio y superior con un enfoque eminentemente práctico orientado a la solución de problemas.

**Estos tutoriales se caracterizan por incluir:**

· un juego de temarios para el diagnóstico del estado del estudiante, que es accesible en cualquier momento. Los resultados de estos diagnósticos son empleados en la navegación inteligente que tiene carácter opcional y oriemtan la recapitulación de los conceptos asociados a errores cometidos.

· textos, gráficos, animaciones, calculadora, ejemplos de solución de problemas tipo de forma tradicional y con el uso de asistentes matemáticos y ejercicios en cada capítulo,

· un módulo del profesor que permite personalizar el trabajo incluyendo el control del acceso de cada estudiante, sus evaluaciones parciales y su trayectoria. Se incluye en la Ayuda información sobre las estadísticas de navegación y de evaluación para la sesión de trabajo, orientaciones para su uso y un glosario con los conceptos fundamentales,

· se desarrolló una versión comercial reducida para disquete que incluye animaciones y una versión sobre CR-ROM que incorpora además videos y sonido.

El diseño educacional abarcó el análisis del plan de estudio, del desarrollo del escenario y la relación interactiva teniendo en cuenta los fundamentos de la disciplina, sus objetivos generales instructivos, los contenidos y las indicaciones metodológicas, así como la selección de los medios de programación del elaborador.

Estas aplicaciones, que poseen una estructura típica de libro electrónico multimedia con características tutoriales y elementos de navegación inteligente sobre Windows 3.1 o superior, fueron desarrolladas para computadoras personales con el uso de los recursos que brinda la multimedia utilizando el lenguaje "C", el ACCESS, y el sistema de autor Toolbook.

**IV.- Conclusiones**

Como conclusiones del trabajo , destacamos los siguientes aspectos:

La articulación de la informática en una institución educativa debe comenzar con la capacitación de profesores y luego éstos se encargarán de "contaminar" a los estudiantes.

El grupo de investigadores adquirió una enorme experiencia tanto en infórmatica como en educación siendo lo más destacable, la experiencia en el diseño y estructuración de los contenidos que serán abordados en la clase computarizada.

Los sistemas de formación de conceptos, ejercitación y resolución de problemas son los temas ideales para en ciertos temas utilizar el asistente matemático computarizado. La representación gráfica junto con el efecto zoom(fundamental en el cálculo diferencial e integral); la posibilidad de simplificar rápidamente, de realizar cálculos complicados en pocos segundos, lo que aporta un enorme grado de realismo a las aplicaciones; finalmente, el simbolismo, que nos permite conocer algún aspecto formal del tema tratado. Estos asistentes se caracterizan por su sencillez manipulativa y pocas exigencias de hardware.

La utilización de la multimedia y la hipermedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y el cálculo en particular enriquecen las herramientas audiovisuales a disposición del educador, mientras que la inclusión de herramientas inteligentes con incidencia en navegación, permiten individualizar aun más dicho proceso. Estos estudios nos confirmaron los beneficios que incluyen el coste reducido, la consistencia instructiva, el incremento de la retención, el aumento de la motivación, el acceso generalizado, mayor individualización, reducción del tiempo y la flexibilidad de los periodos de formación. Esta herramienta debe ser utilizada en correspondencia a las características del grupo de usuarios a quien va dirigida

Recomendaciones

Para el futuro inmediato continuar trabajando en el desarrollo y empleo de tutoriales hipermediales, páginas Webs para INTERNET, que unidas a las clases con ayuda de asistentes matemáticos (con independencia del paquete a utilizar) conformen el diseño de las asignaturas incluyendo en algunos casos si fuera necesario, en la resolución de determinados problemas, la programación por parte del estudiante.

Resulta imprescindible informatizar primero al profesor para que éste se convierta en portador de las nuevas tecnologías en la educación y un agente creador y activo, ya que su empleo está condicionado a las características del grupo de estudiantes a quien va dirigido..

## Referencias bibliográficas:


- (1995). *Actas de las Jornadas sobre la enseñanza de matemáticas con Derive*. Santander, España.
- **Dubinsky De. Et al** (1995) *Calculus , Concepts and Computers*. Mc. Graw-Hill Inc. College Austom Series, USA.
- **Johnson J et. al**. (1995). *Dicovering. Calculus with DERIVE ®*. New York. John Wiley & Sons. Inc.
- **Llorens, J.L**. (1992). *"Introducción al uso de Derive"*. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia.
- **Llorens, J.L.** (1993). *"Aplicaciones de Derive: Análisis Matemático I (Cálculo)"*. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia.
- **Llorens, J.L**.(1994). *"Aplicaciones de Derive: Algebra Lineal (Fundamentos)"*. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia.
- **Melendez, A**. (1995). *Informática y Software Educativo*. Grupo ICFES. Colombia.
- **Erickson, F**.(1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.Wittrock ( Ed .) *Handbook of research on teaching* (3rd ed.) New York: Macmillan.
- **Fernández, F**. (1996) Sistemas de entrenamiento para computadoras personales. Experiencias en su desarrollo. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*, Barranquilla, Colombia, 8 -11 de julio de 1996.
- **Fernández, F**. (1966) "Entrenando con multimedia en PC. Sistemas tutoriales para la Matematica y el Calculo", *Memorias del II Taller Internacional sobre enseñanza de la Matematica para ingenieria y arquitectura*, ISPJAE, La Habana, 25 al 29 de noviembre de 1996, pp 104-109, *Memorias del Evento cientifico Internacional COMPAC´96*, CEDISAC, CITMA, 17 al 19 de diciembre de 1996, La Habana, ISBN 959 - 237- 024 - 9, pp. 135- 138.
- **Fernández, F y otros** (1998). Sistemas Tutoriales para la enseñanza - aprendizaje de la Matemática y la Estadística, Convención Internacional Informática´98, *Memorias del 6to. Congreso Internacional de Informática en la Educación*, 4-9 de febrero de 1998, Cuba.
- **Lima, S, y otros** (1998). Experiencias en el uso del asistente matemático Derive en la enseñanza de la Matemática, Convención Internacional Informática´98, *Memorias del 6to. Congreso Internacional de Informática en la Educación*, 4-9 de febrero de 1998, Cuba.

## Investigando el comportamiento de procesos infinitos a través de modelos y representaciones en un micromundo computacional.

*Ana Isabel Sacristán Rock*
*Cinvestav, México*
*asacrist@mail.cinvestav.mx*

Es claro que el aprendizaje de conceptos relacionados con el infinito, como son los de límite y convergencia en cálculo, o el estudio de conjuntos infinitos son áreas que generalmente presentan dificultades. Uno de los problemas es que el infinito no se puede extraer a partir de las experiencias sensoriales; es un concepto mental que a menudo contradice al sentido común. Y aunque es un concepto básico en las matemáticas (como en el Cálculo) las áreas de la matemática donde se encuentra este concepto son aquellas que tradicionalmente son presentadas desde una perspectiva algebraico-simbólica, lo cuál dificulta la conexión entre el conocimiento formal y el intuitivo. Tomamos como reto crear situaciones en las que el infinito fuera más accesible.

En el caso del estudio del infinito matemático nos interesaba incluir varios tipos de representación en nuestro intento de hacer del infinito algo más "concreto", en particular: (i) el elemento visual ( i.e. gráfico o geométrico), y (ii) los sistemas de representación provistos por los medios computacionales. La computadora permite el uso de representaciones simbólicas (en el código de programación), el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas; y puede ser utilizada como un medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas (ver Noss & Hoyles, 1996). El marco teórico de nuestro trabajo, de corte constructivista, enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje: plantea en particular que el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y que el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de *construir* e interactuar con representaciones (tan diversas como sea posible) externas del concepto (Harel & Papert, 1991).

Así pues, construimos un ambiente ó *micromundo*[1] computacional en el lenguaje Logo, que proporcionaba "herramientas abiertas" (ver diSessa, 1997) para que los estudiantes, mediante actividades de programación, pudieran construir y explorar diferentes tipos de representaciones — simbólica, gráfica, y numérica — de procesos infinitos, específicamente sucesiones y series infinitas. A través de estudios de caso de cuatro parejas de estudiantes mexicanos se analizó cómo las herramientas del micromundo fueron utilizadas para estructurar las actividades y a su vez dar sentido a los procesos estudiados.

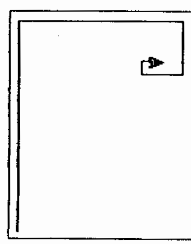


*Figura 1: Modelo de espiral correspondiente a la sucesión* $\{1/2^n\}$

[1] Según la definición de *micromundo* dada por Hoyles & Noss, 1987.

Las actividades en Logo involucraron la construcción (programación) por parte de los alumnos de modelos gráficos — espirales (ver Fig. 1), escaleras, histogramas— de algunas sucesiones infinitas (e.g. $\{1/2^n\}$, $\{1/n\}$ entre otras) y sus series correspondientes.

Cabe resaltar que un aspecto importante de la manera en que se concibieron estas actividades de programación es que crean la necesidad de coordinar los diferentes sistemas de representación: la representaciones gráficas y numéricas se describen y controlan a través del código simbólico (de programación). El uso de la computadora permitió además observar la evolución temporal de cada proceso, eliminando la limitación de sólo observar el estado final (el resultado) del proceso, como suele ser el caso en las matemáticas escolares tradicionales. Esto permitió a los alumnos investigar el *comportamiento de* los procesos infinitos estudiados. La observación del comportamiento, como por ejemplo la velocidad de convergencia, demostró ser un aspecto importante para que los alumnos encontraran explicaciones y construyeran significados del porqué algún proceso era convergente o divergente.

Un ejemplo de lo anterior es ilustrado en la manera mediante la cual dos alumnos de preparatoria (Manuel y Jesús) determinaron la divergencia de la serie armónica. Los pasos de su proceso de exploración y descubrimiento fueron los siguientes:

A partir de la observación en el modelo gráfico en espiral (ver Fig. 2) de un "hoyo" en el centro y la tendencia a evitar el centro se llegó a la realización inicial de un comportamiento diferente para la sucesión armónica en comparación a otros casos estudiados.

- análisis matemático de la fórmula les muestra que $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=0$, i.e., la sucesión armónica converge a cero;
- un regreso al modelo gráfico lleva a los estudiantes a suponer que la convergencia de la sucesión debe ser muy lenta;

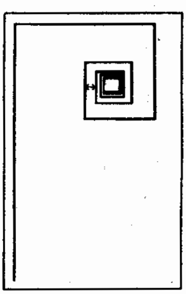


*Figura 2: Modelo de espiral para $\{1/n\}$*

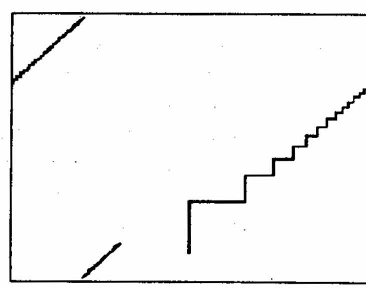


*Figura 3: Modelo en escalera ("envolviendo la pantalla") representando la serie armónica. (escala más pequeña)*

- escogen otro modelo gráfico —una escalera (Fig. 3) — y observan como muestra un crecimiento persistente (correspondiente al comportamiento de la serie)
- la búsqueda por explicar el comportamiento observado resalta lo lento del *ritmo* de convergencia de la sucesión armónica (en comparación a otras de las sucesiones estudiadas)
- la observación del histograma de la sucesión (ver Fig. 4) confirma visualmente la lenta convergencia de la sucesión;

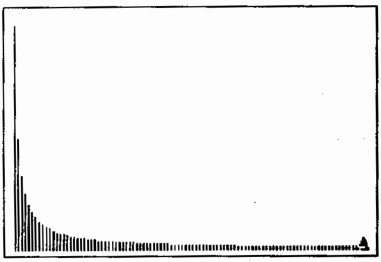


*Figura 4: Modelo en histograma de los primeros 100 términos de la sucesión armónica*

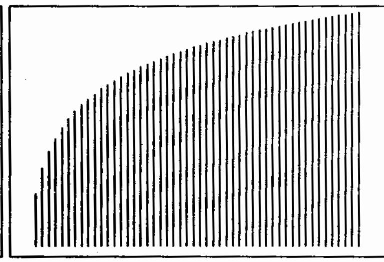


*Figura 5: Histograma de las sumas parciales de la serie armónica. (Diferente escala que la de la fig. 4).*

- los estudiantes (Manuel y Jesús) predicen el comportamiento del modelo de línea (que ilustra el comportamiento de las series) como uno que se va a extender persistentemente hacia una medida infinita
- Surgen dos explicaciones para la divergencia de la serie:
- el proceso es infinito: algo siempre se está añadiendo
- la lenta convergencia de la sucesión.
- Surge un conflicto al percatarse de que (i) arriba siempre es cierto, aún en casos de series convergentes. Nueva duda al poner la atención en la idea de que cuando N es muy grande el crecimiento es muy pequeño, casi insignificante, y por lo tanto parecería poco probable que la serie tenga un valor infinito.
- Sin embargo, un análisis numérico estructurado, mediante tablas de valores (ver tablas 1 y 2), apunta hacia la ausencia de un límite para la serie.
- Este análisis es complementado por el modelo en histograma de las sumas parciales (ver Fig. 5). Los estudiantes se convencen de la lenta divergencia de las series que explican por la lentitud de la convergencia de la sucesión.

Las exploraciones de la sucesión y serie armónica pusieron en relieve los siguientes aspectos: (i) el *lento* comportamiento de convergencia de la sucesión; (ii) la divergencia de la serie y (iii) el efecto de la *velocidad* de convergencia de la sucesión en el comportamiento de la serie correspondiente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 5.555555556 | 2.666666666 | 1.724137931 | 1.265822785 |
| 66.66666666 | 5.405405406 | 2.631578948 | 1.709401709 | 1.257861635 |
| 50 | 5.263157894 | 2.597402598 | 1.694915254 | 1.25 |
| 40 | 5.128205128 | 2.564102564 | 1.680672269 | 1.242236025 |
| 33.33333334 | 5 | 2.53164557 | 1.666666667 | 1.234567901 |
| 28.57142858 | ---------------- | 2.5 | 1.652892562 | 1.226993865 |
| 25 | 4.87804878 | 2.469135802 | 1.639344262 | 1.219512195 |
| 22.22222222 | 4.761904762 | 2.43902439 | 1.62601626 | 1.212121212 |
| 20 | 4.65116279 | 2.409638554 | 1.612903226 | 1.204819277 |
| 18.18181818 | 4.545454546 | 2.38095238 | 1.6 | 1.19760479 |
| 16.66666667 | 4.444444444 | 2.352941176 | 1.587301587 | 1.19047619 |
| 15.38461538 | 4.347826086 | 2.325581396 | 1.57480315 | 1.183431953 |
| 14.28571429 | 4.255319148 | 2.298850574 | 1.5625 | 1.176470588 |
| 13.33333333 | 4.166666666 | 2.272727272 | 1.550387597 | 1.169590643 |
| 12.5 | 4.081632654 | 2.247191012 | 1.538461538 | 1.162790698 |
| ---------------- | 4 | 2.222222222 | 1.526717557 | 1.156069364 |
| 11.76470588 | ---------------- | 2.197802198 | 1.515151515 | 1.149425287 |
| 11.11111111 | 3.921568628 | 2.173913044 | 1.503759398 | 1.142857143 |
| ---------------- | 3.846153846 | 2.150537634 | 1.492537313 | 1.136363636 |
| 10.52631579 | 3.773584906 | 2.127659574 | 1.481481481 | 1.129943503 |
| 10 | 3.703703704 | 2.105263158 | 1.470588235 | 1.123595506 |
| ---------------- | 3.636363636 | 2.083333334 | 1.459854015 | 1.117318436 |
| 9.523809524 | 3.571428572 | 2.06185567 | 1.449275362 | 1.111111111 |
| 9.09090909 | 3.50877193 | 2.040816326 | 1.438848921 | 1.104972376 |
| ---------------- | 3.448275862 | 2.02020202 | 1.428571429 | 1.098901099 |
| 8.695652174 | 3.389830508 | 2 | 1.418439716 | 1.092896175 |
| 8.333333334 | 3.333333334 | ---------------- | 1.408450704 | 1.086956522 |
| 8 | 3.278688524 | 1.98019802 | 1.398601399 | 1.081081081 |
| ---------------- | 3.225806452 | 1.960784314 | 1.388888889 | 1.075268817 |
| 7.692307692 | 3.174603174 | 1.941747573 | 1.379310345 | 1.069518717 |
| 7.407407408 | 3.125 | 1.923076923 | 1.369863014 | 1.063829787 |
| 7.142857142 | 3.076923076 | 1.904761905 | 1.360544218 | 1.058201058 |
| ---------------- | 3.03030303 | 1.886792453 | 1.351351351 | 1.052631579 |
| 6.896551724 | ---------------- | 1.869158879 | 1.342281879 | 1.047120419 |
| 6.666666666 | 2.985074626 | 1.851851852 | 1.333333333 | 1.041666667 |
| 6.451612904 | 2.94117647 | 1.834862385 | 1.324503311 | 1.03626943 |
| 6.25 | 2.898550724 | 1.818181818 | 1.315789474 | 1.030927835 |
| 6.06060606 | 2.857142858 | 1.801801802 | 1.307189542 | 1.025641026 |
| ---------------- | 2.816901408 | 1.785714286 | 1.298701299 | 1.020408163 |
| 5.882352942 | 2.777777778 | 1.769911504 | 1.290322581 | 1.015228426 |
| 5.714285714 | 2.739726028 | 1.754385965 | 1.282051282 | 1.01010101 |
| | 2.702702702 | 1.739130435 | 1.27388535 | 1.005025126 |
| | | | | 1 |

*Tabla 1: salida (simultánea a la graficación de cada barra) de los valores de los primeros 200 segmentos de barra usando una escala de 200. Se observa el aumento en la cantidad de valores en cada rango numérico a medida que progresa la lista; relacionan este comportamiento con la lenta convergencia de la sucesión.*

Es así como los alumnos dedujeron la divergencia de la serie armónica, primero a través de la observación del comportamiento visual, y luego coordinando este elemento visual con el numérico. Los alumnos tuvieron que investigar cómo se relacionaban y coordinaban los elementos para poder resolver las contradicciones intuitivas que surgieron (en particular la aparente paradoja de la convergencia de sucesión y la divergencia de la serie correspondiente). Esto involucró un intenso proceso exploratorio de "ida y vuelta" utilizando todas las herramientas disponibles y sus papeles complementarios: los múltiples modelos gráficos, el análisis de los valores numéricos, como también un análisis de la fórmula matemática. A través de la coordinación de todos estos elementos y de las experiencias, los estudiantes no sólo se convencieron de la divergencia de la serie, sino que también encontraron una explicación para ello en el comportamiento de la sucesión. Este episodio resalta la importancia del estudio del *comportamiento* de una sucesión y de su relación con el comportamiento de su serie correspondiente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4.174559197 | 4.846921265 |
| 1.5 | 4.201586224 | 4.860810153 |
| 1.833333333 | 4.227902013 | 4.874508783 |
| 2.083333333 | 4.253543038 | 4.888022297 |
| 2.283333333 | 4.278543038 | 4.90135563 |
| 2.45 | 4.302933282 | 4.914513525 |
| 2.592857143 | 4.326742807 | 4.927500538 |
| 2.717857143 | 4.349998621 | 4.940321051 |
| 2.828968254 | 4.372725893 | 4.952979279 |
| 2.928968254 | 4.394948115 | 4.965479279 |
| 3.019877345 | 4.416687246 | 4.977824958 |
| 3.103210678 | 4.437963842 | 4.99002008 |
| 3.180133755 | 4.458797175 | 5.002068273 |
| 3.251562326 | 4.479205338 | 5.013973035 |
| 3.318228993 | 4.499205338 | 5.02573774 |
| 3.380728993 | 4.518813181 | 5.037365648 |
| 3.439552522 | 4.53804395 | 5.048859901 |
| 3.495108078 | 4.556911875 | 5.060223537 |
| 3.547739657 | 4.575430394 | 5.071459492 |
| 3.597739657 | 4.593612212 | 5.082570603 |
| 3.645358705 | 4.611469355 | 5.093559614 |
| 3.69081325 | 4.629013214 | 5.104429179 |
| 3.734291511 | 4.646254594 | 5.115181867 |
| 3.775958178 | 4.663203746 | 5.125820166 |
| 3.815958178 | 4.679870413 | 5.136346481 |
| 3.854419716 | 4.696263855 | 5.146763148 |
| 3.891456753 | 4.712392887 | 5.157072427 |
| 3.927171039 | 4.728265903 | 5.167276509 |
| 3.961653798 | 4.743890903 | 5.177377519 |
| 3.994987131 | 4.759275519 | 5.187377519 |
| 4.027245196 | 4.774427034 | |
| 4.058495196 | 4.789352407 | |
| 4.088798226 | 4.80405829 | |
| 4.11820999 | 4.818551043 | |
| 4.146781419 | 4.832836758 | |

*Tabla 2: lista de los primeros 100 valores de las sumas parciales de la serie armónica.*

Como señalaron otros alumnos:

> *Víctor*: Es posible saber más o menos a donde tienden las cosas observando cómo crece o decrece… su comportamiento.
>
> *Alejandra*: A veces vemos un aumento rápido al principio, pero luego observamos que se hace más lento.

**Referencias bibliográficas:**


- **diSessa, A.** (1997), "Open Toolsets: New Ends and New Means in Learning Mathematics and Science with Computers". *Proceedings of PME-21*, Finland; Erkki Pehkonen (Ed.), pp. 47-62.

# Taller de calculo diferencial e integral con maple V

*Hector de J. Argueta Villamar, argueta@servidor.unam.mx*
*Maria Juana Linares Altamirano, linares@servidor.unam.mx*
*Dirección General de Servicios de Cómputo Académica. UNAM. México*

**Objetivo.** El objetivo de este Taller es capacitar a los participantes en el manejo básico de Maple V utilizando fundamentalmente ejemplos de aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de una y varias variables.

**Descripcion.** Maple V es un sistema computacional simbólico o un sistema algebraico para computadora. Ambas frases se refieren a la habilidad de Maple para manipular información en forma simbólica o algebraica. Los programas de matemáticas convencionales requieren valores numéricos para todas las variables. Se pueden usar estas capacidades para obtener soluciones analíticas exactas para muchos problemas matemáticos, incluyendo integrales, sistemas de ecuaciones, sistemas de ecuaciones diferenciales, y problemas de álgebra lineal. Complementando las operaciones simbólicas existe un gran conjunto de rutinas gráficas para visualizar información matemática complicada

Con Maple V se pueden crear documentos interactivos los cuales contienen matemáticas vivas donde se puede cambiar una ecuación y automáticamente se actualiza la solución. El lenguaje natural matemático de Maple V permite introducir fácilmente ecuaciones, realizar cálculos y desplegar gráficos.

Maple V contiene entre sus librerías el paquete llamado student que puede apoyarnos en la explicación de conceptos muy importantes de Cálculo Diferencial e Integral, como son la Derivada y la Integral.

**Dirigido a.** El TALLER DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON MAPLE V está dirigido a Profesores y Estudiantes de matemáticas de nivel medio superior y superior.

**Requerimientos.** Para llevar a cabo este TALLER DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON MAPLE V es importante contar con un aula con computadoras PC 486 o superior, con 8 Mb. en RAM con adaptador gráfico y monitor a color VGA o superior. Además un equipo de proyección que se pueda conectar una computadora para los expositores.

**Duración.** Es recomendable que la duración de este TALLER DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON MAPLE V sea de 6 horas divididas en sesiones de dos horas cada una.

**Ejemplos.** A continuación presentamos algunos de los ejemplos que pretendemos trabajar en el Taller que estamos proponiendo.

En los ejemplos que presentamos podemos observar la valiosa ayuda que pueden proporcionar al profesor y al estudiante los programas matemáticos para computadora, un reto para él es cómo utilizar de forma creativa una tecnología de este tipo.

*Maple V: valiosa herramienta para Cálculo de una variable real*

Consideremos el siguiente problema:

*Dada la función $f(x)=(2/3)x^2+x$. Encontrar $f'(x)$ a partir de la definición de derivada.*

En Maple podemos definir una función de tal manera que podemos evaluar la función en cualquier punto de su dominio y obtener su derivada por medio de la definición.

Definamos a continuación la función, por medio del operador flecha:

```
> f:=x->-2/3*x^2+x;
```

$$f := x \to -\frac{2}{3}x^2+x$$

Veamos cuál es el resultado de hacer el siguiente cálculo

```
> (f(x+h)-f(x))/h;
```

$$\frac{-\frac{2}{3}(x+h)^2+h+\frac{2}{3}x^2}{h}$$

Obtengamos el límite de esta expresión cuando h tiende a cero:

```
> Limit((f(x+h)-f(x))/h, h=0)=limit((f(x+h)-f(x))/h, h=0);
```

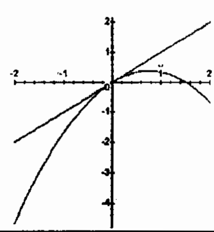
$$\lim_{h \to 0} \frac{-\frac{2}{3}(x+h)^2+h+\frac{2}{3}x^2}{h} = -\frac{4}{3}x+1$$

En Maple V podemos ejecutar los comandos necesarios para obtener el valor de la derivada de la función en $x=0$, y corroborar esto gráficamente.

Utilizando uno de los comandos del paquete **student**, Maple nos muestra la gráfica de $f$ y la recta tangente en $x=0$:

Esto significa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ vale 1. Para ver si esto es correcto, grafiquemos la curva y la recta tangente en $x=0$.

```
> showtangent(f(x), x=0, x=-2..2, color=black);
```

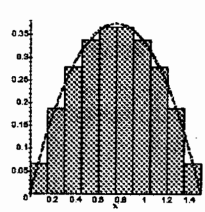


Maple V puede ayudarnos a visualizar la aproximación al área bajo la curva, por medio de rectángulos, esto es podemos ilustrar gráficamente la Sumas de Riemman.

Por omisión el comando **middlebox** divide el intervalo de integración en cuatro subintervalos, pero podemos pedirle que lo divida en mas subintervalos:

Como el resultado no es una buena aproximación, incrementemos el número de rectángulos usado a diez.

```
> middlebox(f(x), x=0..3/2, 10);
```



Para calcular el valor de la suma de las áreas de estos rectángulos usamos el comando **middlesum()**, como el resultado queda indicado, podemos aplicar inmediatamente después el comando **value()**, obteniendo así una aproximación al área bajo la curva:

**Ahora, calculemos el area de estos rectángulos, la suma del área de todos ellos será una aproximación al área bajo la curva.**

```
> middlesum(f(x), x=0..3/2,10);
```

$$\frac{3}{20}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{20}i+\frac{3}{40}\right)^2+\frac{3}{20}i+\frac{3}{40}\right)\right)$$

**Como la suma queda indicada, usando el comando value nos proporciona su valor, las comillas usadas hacen referencia al resultado inmediato anterior.**

```
> value(");
```

$$\frac{603}{1600}$$

Pero si dividimos el intervalo en **n** subintervalos y hacemos tender **n** a **infinito**, entonces sí estaremos obteniendo el valor real del área bajo la curva:

**¿Cuál es valor real del área bajo la curva? Primero usemos n rectángulos, y luego hacemos tender n a infinito. Por último, evaluamos este límite:**

```
> Limit((middlesum(f(x), x=0..3/2, n)), n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{3}{2}\,\frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2}+\frac{3}{2}\,\frac{i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{n}$$

Obtengamos el valor de este límite:

```
> value(");
```

$$\frac{3}{8}$$

Luego para comprobar nuestros resultados podemos utilizar el comando **int()** para obtener el valor de la integral de *f(x)* en [0, 3/2]

**Ahora observemos que podemos obtener el mismo resultado usando la integral:**

```
> Int(f(x), x=0..3/2)=int(f(x), x=0..3/2);
```

$$\int_0^{\frac{3}{2}} -\frac{2}{3}x^2+x\,dx=\frac{3}{8}$$

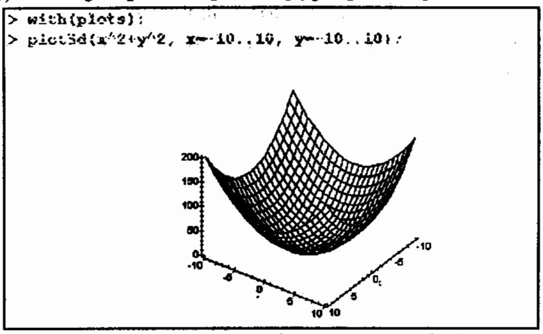
## Maple V: valiosa herramienta para Cálculo de varias variables

Cuando enseñamos Cálculo Diferencial e Integral de Varias Variables uno de los grandes problemas a los que nos enfrentamos es la dificultad para dibujar en el pizarrón una superficie que nos genera una función de $\mathfrak{R}^2$ en $\mathfrak{R}$, o también cuando se trata de visualizar un conjunto de nivel, el cual también puede ser una superficie, si se trata de una función que va de $\mathfrak{R}^3$ a $\mathfrak{R}$.

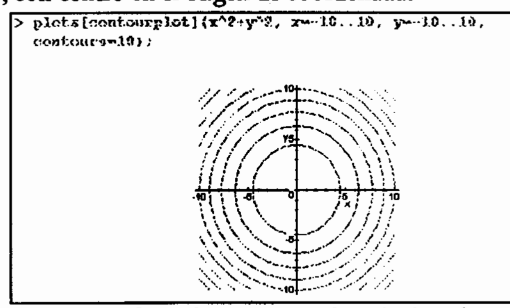
A continuación algunos ejemplos que hemos analizado junto con nuestros alumnos por medio de Maple. Las líneas de comando que se observan en la siguiente imagen le dicen a Maple que cargue el paquete plots desde su librería.

Este paquete contiene comandos que nos permiten graficar superficies y conjuntos de nivel.

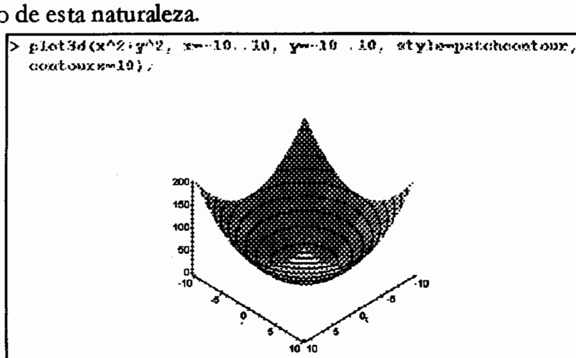
El comando plot3d nos permite graficar una función de $\Re^2$ en $\Re$, como es el caso de $f(x,y) = x^2 + y^2$, para $x \in [-10, 10]$ y $y \in [-10, 10]$




El comando **contourplot** nos muestra las curvas de nivel correspondientes a valores constantes de $f(x,y)$. Podemos observar que se trata de círculos concéntricos, con centro en el origen de coordenadas




También podemos graficar las curvas de nivel sobre la superficie, proporcionando una idea mas clara de lo que son los conjuntos de nivel. La opción **style=patchcontour** del comando **plot3d** es la que usamos para ver un gráfico de esta naturaleza.



Contar con estas herramientas de cálculo y visualización en materias tan complejas y de un orden de abstracción muy alto es lo que demuestra, entre otras cosas, la potencia de la computadora en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

El tiempo que ahorra el alumno en los cálculos, puede ahora dedicarlo a entender mejor los conceptos y por consecuencia sus preguntas o inquietudes se elevan de nivel.

# INCORPORACIÓN DE DISTINTAS PERSPECTIVAS

# Transculturación de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos durante los siglos xviii y xix

*Alberto Camacho Ríos*

## El Neologismo transculturación

El prefijo latino *trans*, en el neologismo *transculturación*, sugiere o da idea de movimiento, de traslación, o de colocar esto o aquello al otro lado, atrás o en la parte opuesta.

El término *transculturación* es poco usual y conocido, particularmente para nuestra lengua el Larousse (edición de 1982) le define así:

Proceso de difusión o de influencia de los rasgos culturales de una sociedad cuando entra en contacto con otra que se encuentra menos evolucionada. p. 1016

El proceso de transculturación, es mas conocido en otras lenguas como *proceso de difusión*. El sociólogo norteamericano Paul H. Landis, uso en 1975 el término *culture change* para designar aquellas sociedades que evolucionan vía procesos de difusión cultural desde otros estadios culturales.

En su libro *Introducción a la Sociología*, Chinoy E, define al proceso de difusión como, *la transferencia de elementos culturales de una sociedad a otra.*

Todo proceso de difusión tiene un comienzo, un medio y una terminación. La iniciación de procesos de cambio sociocultural, es generalmente una respuesta a la desorganización social de la cultura receptora.

Cada proceso lleva consigo elementos nuevos de comunicación, tales elementos pueden ser considerados como innovaciones por la sociedad que los recibe. Las innovaciones no dependen del azar sino más de la urgencia o grado de desorganización de la sociedad receptora.

Varios factores contribuyen a la difusión de elementos culturales entre dos ambientes sociales distintos, como pueden ser, la accesibilidad de la comunicación y la transportación de los elementos.

Las singularidades más significativas que prescriben al proceso son:

a) La geografía o barreras naturales

b) La migración, guerra o conquista

c) Los medios de comunicación

De aquí el efecto atemporal del ingreso de los elementos culturales hacia el ambiente al que van dirigidos.

Generalmente los procesos de transculturación son dirigidos por grupos de personas, ya sea desde la sociedad cultural que origina la difusión, o bien por grupos que la promueven desde la sociedad cultural receptora.

La apropiación de nuevos elementos culturales es aceptada por el *recipiente cultural* solo si tienen lugar para que ello ocurra y si estos tienen una utilidad en la cultura que los recibe.

El acervo cultural que promueve todo proceso de transculturación pueden ser ideas, conocimientos (científicos o educativos), aspiraciones políticas (ideologías), tecnología, etc.

En muchos casos, como lo sugiere la experiencia histórica, la tarea del proceso no implica de transformar la realidad cultural de la sociedad receptora, sino de sustituirla por los nuevos elementos que se introducen. Un ejemplo de ello es el proceso de hibridación sufrido hacia las culturas indígenas mexicanas durante la conquista española.

Con la intención de precisar en el análisis de elementos de la matemática que fueron difundidos en nuestro país desde finales del siglo XVIII y hasta mediados del siglo XIX, vía procesos de transculturación, hemos definido el término transculturación didáctica como aquel:

Proceso de difusión del conocimiento científico que, *elementarizado*, recibe un transporte geográfico desde recintos culturales o educativos en su origen hasta nuevos recipientes culturales en los que se inicia un proceso de difusión didáctica del conocimiento.

Particularmente el conocimiento científico, al que consecuentemente haremos referencia, es el conocimiento matemático, ya sea en su etapa primitiva o técnica, o bien, en su concepción elementarizada para la enseñanza.

De acuerdo al proceso hemos establecido tres tipos de regularidades para la difusión del conocimiento matemático, estas son:

a) Transculturación Didáctica Externa

El proceso de difusión del conocimiento matemático elementarizado, queda determinado por grupos que le controlan en su origen, ellos, deciden por los conocimientos o elementos que deben ser difundidos a la sociedad receptora según sea el control o sujeción científica hacia ésta.

También puede ocurrir que el contacto humano, generalmente de profesores, científicos, etc., con las instituciones educativas o sociedades científicas de la cultura de origen, permita la apropiación de los conocimientos matemáticos para su posterior difusión en la cultura receptora.

b) Transculturación Didáctica Interna.

El proceso de difusión queda sujeto y dirigido por grupos políticos, científicos, culturales, etc., que pertenecen a la sociedad receptora. Igualmente, estos deciden por los conocimientos matemáticos a difundir lo cual da al grupo un criterio de pertenencia social e identificación cultural o científica con la sociedad de origen.

c) Transculturación Didáctica Local.

El proceso de difusión local sucede con la apropiación y consolidación de los conocimientos llevados a la cultura receptora mediante un proceso de transculturación interna o externa, o bien puede ocurrir por la invención en esta cultura, de nuevos elementos conceptuales del conocimiento.

Más, precisamos distinguir el Proceso de Transculturación Didáctica de la Teoría de la Transposición Didáctica definida por Chevallard, ya que ambos esquemas muestran acercamientos significativos.

Chevallard ha hecho de su teoría una evolución sistemática, para 1992 llegó a un acercamiento de su teoría en tanto el saber colocado en las instituciones donde éste habita, viéndose la teoría de la transposición como:

Para hacerse de un objeto de I (I es una institución), una persona X debe aprender ciertos saberes S, particularmente porque ciertos de estos saberes viven en I, y para que el objeto I quede en la posición p que él ocupa, X deberá tener una relación R(X, S) conforme a una cierta relación RI (p, S).

No olvidemos que un saber S, desde el punto de vista de su génesis social, vive primero en una institución P(S), que es su hábitat original [...] Su presencia en I supone luego que haya un transporte de P(S) a I. Esto es lo que nombro Transposición Institucional de P(S) a I [...]

véase: [Chevallard Y, p. 109, 1991]

El proceso de transculturación didáctica se caracteriza por el transporte de conocimiento matemático por difundir en la sociedad receptora, toda vez que sufre un proceso de elementarización que permite incorporarle en libros de texto, *obras elementales*, que sirven de vehículo al propio conocimiento.

En la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, el conocimiento transportado a otras instituciones desde su hábitat son los *objetos del saber*, conceptos matemáticos, teoremas, definiciones; es decir, elementos particulares del conocimiento matemático cuyo transporte **requiere de ser manipulado por una noospherè** que le hace accesible a la enseñanza.

Nuestro proyecto se caracteriza por el análisis que hacemos, en la sociedad receptora, de la difusión didáctica del proceso de transculturación de elementos matemáticos que tuvieron vigencia educativa en Francia y España a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, **toda vez que su propagación fue determinantemente seleccionada, organizada y deliberadamente respaldada y controlada**, por personas o grupos que pretendían con ello seguir fortaleciendo el predominio o sujeción cultural hacia nuestro país, como mas adelante veremos.

De entre los escritores y autores mexicanos de documentos histórico-biográficos y de historia de la ciencia que en la actualidad han mostrado procesos de difusión en el ámbito social, político, y generalmente cultural, de España hacia el México novohispano, podemos citar a Octavio Paz por su libro: *Sor Juana Inés de la Cruz*, él, emplea indistintamente el término *transportación* para significar el proceso de difusión cultural; otro autor que realiza recorridos históricos mostrando procesos de transculturación científica y tecnológica, entre los países y épocas citadas, es Elías Trabulse Por su parte Guillermo Bonfil B. Muestra, en su *México Profundo* la afectación del proceso en tanto el impacto social y cultural hacia el México indígena, haciendo ver el fenómeno para diversas etapas históricas de nuestro país.

A partir de normar el control de la educación en México es que los grupos dominantes, en su origen los españoles, realizaron una función social orientada hacia la formación de valores intelectuales en las instituciones educativas novohiapanas ya cercanas a la etapa independentista.

La constitución española de 1812 es el antecedente ensayo educativo de lo que sería el reglamento general de instrucción pública de 1821 establecido en la constitución promulgada en las cortes de Cádiz; el reglamento en el artículo 371 pretendía:

Intervenir en la redacción de buenas obras elementales sin prejuicio de la libertad de escribir, imprimir y publicar, este proyecto es consecuencia de la propuesta de M. G. Jovellanos en 1800, él señala en su *Memoria sobre la educación pública.*

La necesidad de promover la formación y publicación de tratados elementales en castellano.

En las recomendaciones, se observa la influencia de los revolucionarios franceses que años atrás habían ya sugerido la necesidad de elaborar manuales didácticos.

Si bien la constitución española de 1821 no fue promulgada en México porque llegó después de la independencia, su influencia fue determinante para los posteriores decretos de instrucción pública que se propondrían en el país. El reglamento tuvo de entre sus gestores a varios mexicanos.

La constitución de 1812 es importante, debido a que, de la propuesta, surgirá una de las obras elementales que en nuestro proyecto se analiza.

De las obras elementales que analizamos en el proyecto, los *Principios de Matemáticas* de Benito Bails y el *Compendio de Matemáticas* de José M. Vallejo fueron los vehículos que sirvieron de transporte al conocimiento en el proceso de transculturación externa ocurrida a principios del siglo XIX de España hacia México. La difusión de los conocimientos ubicados en estos textos dio inicio nuestro país en 1792 con el surgimiento del Seminario de Minería donde fue utilizada como texto la obra de Bails. Posteriormente, aproximadamente en 1840, arribaría al colegio de San Ildefonso el *Compendio de Matemáticas* de Vallejo, así como las *Institutiones Philosophicae* de Francisco Jacquier; editado este último durante la segunda mitad del siglo XVIII en España.

Ya sin la sujeción cultural española los grupos de conservadores y liberales mexicanos propiciaron, en diversas etapas de la historia, procesos de transculturación didáctica interna, que para los colegios mencionados culminará con la introducción de obras elementales francesas como el, Calcul Differentiel et Integral de Bouchalart (en Minería), o bien la diversa obra de Bourdon (en Minería y San Ildefonso).

Estas últimas obras permitirían, en los colegios mexicanos citados (en las otrora Escuela Nacional de Ingenieros y Escuela Nacional Preparatoria), consolidar los conocimientos matemáticos que en los colegios europeos se enseñaban, y en consecuencia serían fundamentales para que, por primera vez en nuestro país, fueran escritos los primeros libros de texto de matemáticas (cálculo infinitesimal, álgebra, geometría, etc.) sujetos al decreto de instrucción pública juarista del 2 de diciembre de 1867; cuya difusión local refleja el logro de conocimientos científicos por connotados intelectuales mexicanos, como fue el caso de los establecidos por el ing. Francisco Díaz Covarrubias.

Como se ha visto son tres los procesos de transculturación que en el proyecto abordamos, estos son:

a) El proceso de difusión que inicia de España hacia finales del México novohispano, en el que figura el análisis del *Compendio de Matemáticas* de José M. Vallejo que llegó a situarse en la didáctica de la matemática en el colegio de San Ildefonso.

b) La difusión de conocimientos propiciada por grupos de intelectuales mexicanos, políticos conservadores y liberales, cuya influencia quedo sujeta en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en el colegio de Minería vía el texto de Cálculo Diferencial del autor francés Boucharlat.

c) El proceso de transculturación local de conocimientos matemáticos establecidos en nuestro país por el ing. Francisco Díaz Covarrubias, cuyo impacto llegaría a las escuelas mexicanas ya citadas e incluso trascendería, en su momento, en el ambiente científico Europeo y de los E. U. A.

**Referencias bibliográficas:**


- **Landis, P**. (1975). *Sociology*. Ginn and Company, Lexington Massachusetts, pp. 194 a 198, U S A.
- **Chinoy, E**. (1992). *Introducción a la Sociología*. Paidos Studio, p. 86, México.
- **Faris, R.** (1994). *Cambios Sociales*, p. 359, F. C. E. México.
- **Paz, O**. (1995). *Sor Juana Inés de la Cruz*, F C E, 3a. edición, México.
- **Bonfil, G**. (1994). *México Profundo*, Grijalbo.
- **Choppin, A.** (1994). *La livre scolaire en Spagne, Manuels scolaires: états et sociétès XIXe XXe siècles*, sous la direction de, I N R P Publications, Paris.

## Reflexiones sobre la metafísica del calculo infinitesimal: 1797-1997

*Egbert Agard*
*Universidad de Panamá, Panamá*
*Departamento de Matemática, SENACYT*

La Historia de la Matemática conoce pocos casos de hombres que desarrollaron, durante la primera etapa de su vida, una extraordinaria carrera político-militar seguido, posteriormente, por insignes aportes de orden científico y tecnológico.

Uno de los personajes que se enmarca en este perfil es Lazare CARNOT, graduado en Metz en 1773, cuya primera obra de arte militar, l'Eloge de Vauban, fue merecedora del primer premio de la Academia de Dijon en 1784; en el aspecto logístico, planificó y realizó una completa reestructuración del ejército, la cual constituyó el factor decisivo para el triunfo de la revolución; la Historia de Francia lo ha apodado l'Organisateur de la Victorie. En lo político, su valor e inquebrantable patriotismo permitió que se ocupara, temporalmente, los Ministerios de Guerra e Interior.

Del matrimonio de Claude CARNOT y Marguerite POTHIER en 1745, nacieron 19 hijos de los cuales sólo 8 sobrevivieron –dos hembras y seis machos- siendo Lazare el segundo en edad de la familia del prestigioso notario de Nolay, pequeña ciudad a la Cote d'Or francesa; de todos los hermanos Lazare, llamado le Grand Carnot, fue el único que mostró una excelente aptitud hacia las Ciencias Exactas.

El 26 de julio de 1796, Carnot fue elegido miembro de l'Academie des Sciences en la sección matemática para ocupar el puesto que, por su deceso, dejará el creador de la determinante, Alexandre Vandermonde. Paralelo a su actividad científica, Carnot compartía junto con otros cuatro miembros, el Directorio de Francia, cuya función principal era establecer el orden en el país. Debido a intrigas de parte de tres de sus miembros, Carnot fue objeto de recriminaciones públicas; una orden de arresto lo obligó huir a Alemania donde escribe sus Reflexiones sur la Metaphisique du Calcul Infinitésimal en 1797.

El largo título del libro es una característica, de las obras de matemática publicadas durante esa época y constituye una respuesta al ataque del Obispo de Berkeley a la estructura del Cálculo de Newton hecha a tráves de ***"The Analyst"*** en 1734; este "panfleto" de ciento cuatro páginas, señala las controverisas existentes entre los matemáticos en lo relativo a la interpretación de los conceptos fundamentales. Por más de medio siglo después de las desafortunadas críticas, los matemáticos del siglo dieciocho realizaron grandes esfuerzos en orden de alcarar las interpretaciones conflictivas existentes en la fundamentación del cálculo durante esa época. La frase ***metafísica del cálculo***, que forma parte del título, nos indica que el autor tiene como objetivo estudiar el cálculo desde su escencia; es decir, aquello sin lo cual no se puede concebir el cálculo infinitesimal; ese elemento "primario" es el infinitésimo a cuyo estudio se dedicó desde un punto de vista geométrico.

¿Por qué surge esta primera publicación a las finales del siglo dieciocho? ¿Cuáles son las características de la obra? ¿Qué importancia tiene este trabajo, hoy a dos siglos de su publicación?

La Sección de Matemática de la Academia de Berlín, presidido por Lagrange, en su reunión del 3 de junio de 1784 propuso como tema de su concurso de 1786 el problema del ***infinito en matemática***. El texto del anuncio del concurso fue la siguiente:

El servicio derivado de la matemática, la opinión que se tiene de ella y el nombre honorable que se le ha otorgado de "ciencia exacta" par excellence, se debe a la claridad de sus prinicpios, el rigor de sus pruebas y la exactitud de sus teoremas.

Con el objeto de perpetuar estas valiosas ventajas en una teoría clara y exacta de lo

que se entiende por "Infinito en Matemática". "Es sabido que la Geometría Avanzada emplea regularmente el infinitamente grande y el infinitamente pequeño. Los geómetras

de la antiguedad y aún ciertos eminentes analistas modernos consideran que la frase magnitud infinita es una contradicción en lo relativo a sus términos. [9]

Al recibir información en agosto de 1784 sobre el concurso, Carnot envía su disertación el 8 de septiembre de 1785 titulada ***"Dissertation sur la théorie de l'infine mathématique"*** a Monsieur J.H.S. Formey, secretario perpetuo de la Academia de Berlín; el manuscrito consistente de un total de 90 páginas inicia con notas preliminares seguido de un sumario y el texto principal consistente en 13 páragrafos.

Veintitres ensayos participaron en el concurso académico, cada uno con un seudónimo que no permitirá al jurado identificar el autor; seis meses después del cierre del concruso –1 de junio de 1786- la Academia decidió, de manera unánime, otorgarle el premio al ensayo titulado: ***Exposition Élémentaire des rincipes des Calculus Superieurs*** del matemático suizo Simon L' Huilier. El 17 de abril de 1788, Carnot somete a la Academia de Dijón un nuevo manuscrito titulado: "***Nouvelles idées sur la metaphisique du Calcul Infinitesimal"*** que es una nueva versión de su memoria anterior; el primero de agosto de 1796 Carnot decide publicar su memoria; el 14 de junio del año 1797 Carnot deposita en el Instituto de Francia el primer ejemplar de su libro publicado por Duprat en París. Según R. Taton la obra vió la luz publica tres meses y medio después de la publicación de ***"Traite de Calcul Differentiel et du Calcul Intégral"*** de S. F. Lacorix y diez días despuées de la publicación de ***"Théorie des Fonctions Analítiques"*** de Lagrange; al final de 1797 y desde su exilio en suiza, Carnot publica en un sólo volumen ***"L'Essai sur les Machines en General y Reflexions sur le Calcul Infinitesimal"*** en una sola obra titulada ***"Oeuvres Mathématiques du Citoyen Carnot***". La obra fue aceptada en toda Europa Occidental puesto que hubo traducciones en portugués, inglés, alemán, italiano y ruso; posteriormente hubo cinco ediciones en francés siendo el último en 1970.

En el primer capítulo, titulado ***Principes généraux de l'analyse infinitésimale***, Carnot inicia con el estudio de la subtangente definida por la tangente a una circunferencia dada; dos definiciones –cantidades designadas y no designadas son analizadas seguidos de tres teoremas, cinco teoremas y la solución de cinco problemas. Uno de los problemas estudiados consitió en mostrar que es absolutamente imposible que un círculo pueda ser consierado un polígono; sin embargo esto se pudo lograr mediante una ***compensación de errores,*** fenómeno que contribuyó a la concepción de lo infinitamente pequeño.

El segundo capítulo, titulado ***"De l'algorithme adapté á l'analyse infinitesimale"*** Carnot resume todos los conocimientos de su época sobre el cálculo diferencial, integral y de variación. El tercer capítulo titulado ***"Des methodes par lesquelles on peut suppleer á l'analyse infinitesimale,"*** hace una descripción de la idea de inifinitesimal; inicia con el método de exhausión luego el método de indivisibles de Cavalieri, el método de indeterminados de Descartes, de los límites de Newton y la noción de fluxión de Newton.

Reflexions sur la Métaphisique du Calcul Infinitésimal de Lazare Carnot constituye, sin duda alguna, una muestra del pensamiento crítico de los intelectuales del siglo XVIII; el desarrollo de las nociones fundamentales se apoyan en el Método de Exhausión de los griegos, el Método de Indivisibles de Cavalieri, el Método de Indeterminados de Descartes.

Evaluar el trabajo de Carnot, a dos siglos de su publicación, no es una tarea fácil; pero al estudiar el Desarrollo Conceptual del Cálculo y analizar los trabajos realizados por eminentes matemáticos del siglo XIX, tales como Cauchy, Gauss, Bolzano, Weierstrass y Reimann; así como Lebesque, Robinson en el siglo XX, percibimos que sus concepciones fueron influenciadas por ***Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitésimal.***

**Referencias bibliográficas.**


- **Blay, M.** (1986) Deux moments de la critique du Calcul Infinitesimal: Michel Rolle et George Berkeley. *Revue d'Historie des Sciences* 39 (3) pp 223-253.
- **Boyer, C**. (1954) Carnot and the concept of deviation. *American Mathematical Montly* 61 (7) pp 459-436.
- **Boyer, C**. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover Publications Inc. New York.
- **Carnot, L.** (1970) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*. Reimpresión de la 2da edición, A. Blanchard.
- **Gillispie C. y Youschekivtch, A**. (1971) *Lazare Carnot Savant*. Princenton University Press, New Jersey.
- **Pita, C**. (1983) *Usos y Fundamentos de los Infinitesimales en el Siglo XVIII*. *Opera Prima*, N°3, México D.F.
- **Soboul, A**. (1979) Lazare Carnot en *Encyclopedia Britannica*, VOL III, University of Chicago. U.S.A.

# FORMACIÓN DE PROFESORES

## La concepción docente al inicio del proceso de transformación educativa en la provincia de Jujuy Argentina.

*Mirta Daino, Ana L. de Perassi, Cecilia Lasserre*
*FHyCS - Fac. de Ingeniería - Universidad Nacional de Jujuy - Argentina*

En la Argentina la "formación inicial" como fase preparatoria formal para el ejercicio de la docencia en el nivel primario se realiza, desde 1969, mayoritariamente en Institutos de nivel terciario no universitario, que constituyen un circuito escolar específico y a la vez diferenciado del que brinda formación para la enseñanza en otros niveles. En Jujuy, se realiza en Institutos Terciarios.

Caracterizamos la etapa de "formación inicial" como "formal", porque entendemos que la formación docente no se inaugura en este momento, sino que la misma incluye influencias de las experiencias vividas en la escolaridad previa, como también las posteriores de su actividad laboral inicial, durante la socialización profesional.

Nuestra Investigación intentaba (año 1992) establecer las relaciones entre la formación docente, las prácticas pedagógicas en el aula y el Documento Curricular (DC) para escuelas primarias, entendiendo que la enseñanza de la matemática en las escuelas primarias constituye un amplio campo en el que tanto sus condicionantes (formación docente, documento curricular, situación socio-institucional), como los actores sociales intervinientes, constituyen sus componentes esenciales.

Para el relevamiento de la información, utilizamos encuestas con preguntas abiertas y cerradas dirigidas a los profesores de los Profesorados, del área matemática, y a los alumnos residentes de los Institutos de Formación Docente (IFD). En el caso de los profesores se trabajó con todos los docentes, de materias relativas al área de las matemáticas de todos los IFD de la provincia; en cambio para los alumnos residentes, la muestra se circunscribió a tres Instituciones, dos de la Capital provincial y una de Palpalá (distante 15 km, de aquella), de distinta tradición histórica, originarias de distintas jurisdicciones, con propuestas curriculares y formas organizativas diferentes, dirigidas a grupos de edad y condiciones laborales también distintas.

Se recogieron datos acerca de lo que piensan ambos colectivos sobre el DC para escuelas primarias de 1978 y los nuevos Contenidos Básicos Comunes (CBC) de 1995 en general y sobre el área de matemática en particular ; sobre la Ley Federal de Educación (1993); sobre la formación docente en general y en particular sobre los contenidos matemáticos; y sobre la calidad de la formación que brinda actualmente la escuela primaria.

Asimismo, se obtuvieron datos sobre la situación laboral y la formación profesional de los Profesores y de los motivos de elección de la carrera en el caso de los alumnos residentes.

Estos datos se contextuaron, para su interpretación en :

- el conocimiento del tipo de organización académica de los IFD, que sólo reconoce la tarea de desarrollo curricular en el aula;
- su dinámica institucional, que puede designarse como endogámica (en tanto que su funcionamiento se plantea como autosuficiente, aislado y autoregulable), tipo de dinámica que pareciera profundizarse proporcionalmente al progresivo deterioro de las condiciones laborales, la desvalorización social del prestigio del que, en otros tiempos, gozara la profesión docente y las demandas y exigencias que desde las políticas educativas gubernamentales se les imponen;
- las historias de las modificaciones de los planes de estudios, donde la participación de los actores involucrados en su generación fue escasa o nula, y donde la finalización de sus aplicaciones obedeció más a razones de política partidista que a cuestiones de políticas académico-curriculares;
- los programas actuales de las asignaturas del área Matemática y Matemática y su didáctica, de fuerte tendencia tecnocrática.

El análisis se centró en las representaciones que sostienen tanto los profesores como los alumnos residentes. ¿Porqué las representaciones? Si seguimos a Postigo de Caffe "Las representaciones funcionan como organizadores tanto del pensamiento como de la acción de los sujetos, condicionando sus relaciones con los otros individuos, las tareas, los procesos y las cosas".

A partir de esto, se consideró que las representaciones se constituyen en el "lugar" de articulación entre el pensamiento y la acción, y de allí su potencial explicativo.

**Resultados:**

El análisis del discurso de los ALUMNOS RESIDENTES , acerca de las distintas temáticas enunciadas anteriormente, permitió inferir como características de su pensamiento:

1. El ISOMORFISMO entre el "saber" que sostienen que deben poseer los maestros de primaria (que es el que deben aprender ellos durante su formación inicial) y los contenidos a enseñar en la escuela primaria. Dicen:

   "Hay que aprender lo que hay que enseñar ..."

   "Elegí esta carrera porque es corta y fácil"

2. El PRAGMATISMO donde lo prioritario o lo válido es la "formación práctica" entendida ésta como desvinculada y hasta antagónica a la teoría. Esto se visualiza tanto:
   a) en la mayor importancia que dan a las materias instrumentales por sobre las de formación básica;
   b) La concepción de la didáctica reducida a meras metodologías, al cómo enseñar;

c) la identificación y reducción, de la idea de práctica con "la actividad de enseñar en el aula";
d) la concepción de que el único criterio válido para seleccionar los contenidos matemáticos a enseñar en la escuela primaria es el de que "se pueda aplicar para resolver problemas de la vida diaria";
e) la idea de que las competencias a proponer en el aprendizaje de las matemáticas se demuestran por la eficiencia en la aplicación de algoritmos.

3. Coincidente con 2.a y 2.b, que son complementarios y se refuerzan mutuamente, ya que ambos reconocen la "racionalidad técnica" como supuesto fundante, aparece la concepción de la profesión docente como un accionar reducido al aula, a la manera de un experto en metodologías, y un accionar cuya calidad depende de la "responsabilidad y la voluntad individual" de cada docente.

Esta CONCEPCIÓN TECNOCRATICA del docente y de la educación en la que son formados los futuros docentes, deja librado el rumbo de lo que sucede en el aula y el rumbo de la formación que brindan las escuela al voluntarismo de los maestros, y desde una perspectiva que reduce el trabajo docente a su dimensión técnica, desestimando lo institucional, lo socio-cultural y lo político ideológico.

En este mismo sentido de racionalidad técnica, conciben a la matemática como una ciencia neutral, a-social y a-histórica, que posee unos contenidos incuestionables.

A diferencia de los alumnos residentes, los profesores demuestran una perspectiva crítica respecto del DC, la formación docente, la escuela primaria ... , que analizan desde la dimensión técnico-pedagógica en el contexto de las condiciones laborales,. institucionales y socio-económicas más generales

**Conclusiones e Interrogantes:**

De acuerdo a lo expuesto, las "conclusiones" en realidad marcan algunos meros interrogantes:

- ¿Cuál es el alcance de la formación docente inicial en su práctica docente posterior?
- ¿Por qué la perspectiva crítica que muestran los profesores no se ha trasmitido/trasmite a los alumnos de los IFD ?
- Específicamente en el área de la matemática, ¿cómo pensar que los futuros maestros podrán suscitar actitudes de indagación, de problematización ... , cuando en su propia experiencia como alumnos residentes no se han visto favorecidos a desarrollar esta actitudes?
- ¿Qué modificaciones reales y en qué dimensiones (contenidos disciplinarios, pedagógicos, actitudinales) producirán las actuales políticas de capacitación docente?. Esto teniendo en cuenta que:

- son impuestas en forma compulsiva, vertical y desde afuera, desconociendo las situaciones institucionales e individuales (expectativas, intereses) de aquellos a quienes están dirigidas;
- abordan sólo los contenidos disciplinares, en cursos cortos, definición que nos remite a pensar si no estaremos en presencia de un nuevo enciclopedismo, donde una vez más se refuerza que el único criterio válido para la selección y organización de los contenidos escolares es el logocéntrico o disciplinar;
- no se acompañan de mejoras en las condiciones laborales y salariales de los docentes, ni de transformaciones reales en la organización y dinámica de las instituciones educativas.

**Referencias bibliográficas:**


- **AA.VV.** (1995). *Volver a pensar la educación*. De. Morata,. Madrid.
- **Davini, Ma**. (1995). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Paidos.
- **Camilloni, A. et al.** (1996). *Corrientes contemporáneas*. Paidos, B.A..
- **Postigo de C.,C**. (1992). *El fracaso escolar y sus representaciones en una institución educativa* - UNJu.

# La geometría en el jardín de niños: una experiencia de actualización para docentes de preescolar

*Silvia Tiscareño Rodríguez, Ma Guadalupe Romero Borja*
*Universidad Pedagógica Nacional Unidad Upn 113 León*

## I. Antecedentes

A través de una revisión analítica de los estudios que sobre geometría en el nivel preescolar han sido presentados en diferentes reuniones sobre matemática educativa, de 1994 a la fecha, nos encontramos con lo siguiente:

- *Estudios que abordan la matemática en el nivel de preescolar:*
  - Resolución de problemas aditivos en niños preescolares, en Micromundos logo.
  - Un modelo de enseñanza para el conteo en niños de preescolar y primaria,
  - - Desarrollo de los procesos de estimación en cálculo y medida en niños de tercer grado de preescolar y primer grado de primaria.
- *Estudios sobre Formación de Docentes de Nivel preescolar:*
  - Etnomatemática en Educación preescolar.
- *Estudios sobre Nociones espaciales:*
  - La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad.
- Con respecto a la construcción de las nociones espaciales en el preescolar, no hemos encontrado estudios al respecto.

Desde esa ausencia es que surge el interés de proporcionar a maestros de preescolar elementos básicos para trabajar la propuesta curricular formal, (Programa de Preescolar 1992, vigente en la República Mexicana, PEP'92) en la cual subyace como fundamento un enfoque constructivista de aprendizaje, para ello se diseñó como parte del Campo Problemático "Desarrollo de la Educación Básica en la Unidad UPN 113 León el Curso de Actualización: ***"Diseño, aplicación y evaluación de estrategias constructivistas para la enseñanza de la Geometría en Preescolar"*** que se ofreció a educadores y educadoras de preescolar.

## II. Estructura del curso

### Objetivos:

1. Aplicar principios constructivistas en el diseño de estrategias didácticas para nociones geométricas en el preescolar.
2. Demostrar la congruencia teórico práctica en la aplicación de estrategias didácticas constructivistas sobre nociones geométricas en preescolar.
3. Preocuparse por transformar prácticas docentes acríticas y rutinarias en la enseñanza de la geometría en preescolar.

### Estructura temática:

I. El programa de preescolar; II Esquema corporal; III. La geometría y la perspectiva pedagógica constructivista; IV. Estrategia metodológico-didáctica; V. Distribución de tiempo; VI. Evaluación.

**III. Caracterización de la población atendida.**

Se inscribieron al curso 32 educadoras con la siguiente caracterización:

*Datos personales:* la edad de la población osciló entre 26 y 40 años. 28 de ellas residen en la ciudad de León, y 4 en la ciudad de Silao, zona de influencia de la Unidad. 19 de ellas (59%) tienen estudios de Normal Peescolar de cuatro años y 10 (30%) tienen estudios de Licenciatura en Educación Preescolar. *Datos laborales:* todas trabajan una sola plaza en turno matutino y en escuela urbana, la mayor parte (29) trabajan en la ciudad de residencia (León), 22 educadoras (69%) tiene entre 7 y 15 años de servicio, con respecto a su función 25 son maestras de grupo, 5 directoras y 2 fungen como personal de apoyo.

**IV. Diagnóstico inicial**

El diagnóstico inicial recuperó dos aspectos importantes: Expectativas y Conocimientos previos.

- Con respecto a las expectativas, se manejaron los siguientes rubros: contenidos, materiales, asesores y repercusiones en su práctica docente. En cuanto a contenidos las opiniones se orientan hacia la ampliación de conocimientos sobre geometría, y que respondan a las necesidades de la educadora para facilitar la transformación de la práctica. Sobre los materiales esperan que sean adecuados, accesibles, no costosos y prácticos. En referencia a las asesoras, se centran en dos aspectos, en cuanto a lo metodológico, que orienten y enriquezcan con su experiencia, en cuanto a factores de personalidad, que sean abiertos, comunicativos y sobre todo que brinden confianza para expresar dudas. En lo referente a repercusiones en la práctica docente las maestras de grupo esperan fundamentalmente enriquecer y mejorar su práctica docente y las directoras mejorar y apoyar el trabajo en sus Jardines.
- Respecto a conocimientos previos se manejaron tres indicadores: a) justificación del fundamento constructivista del programa de preescolar, b) conceptos geométricos que se enseñan en preescolar, y c) la relación entre Psicomotricidad y Geometría. En relación con el fundamento constructivista del programa, sus conocimientos previos se centran en afirmar que ***"el niño construye"***, pero no hay ninguna justificación formal de ello. En relación con los conceptos geométricos que se enseñan en preescolar, estos se ciñen, en un gran porcentaje (75%) a figuras geométricas y líneas, sólo tres mencionan lateralidad y ubicación en el espacio. Respecto a la relación entre Psicomotricidad y Geometría, sólo una educadora hace la relación en forma clara, 13 (40%) hablan de lo importante que son pero no hacen la relación, 5 (16%) las separan o sólo identifican un aspecto de ellas.3 (10%) hacen relaciones falsas, o en parte falsas.

**V. Desarrollo del curso**

El desarrollo del Curso siguió la estructura temática presentada en el programa y se efectuó de la manera siguiente:

1. Fueron trabajadas nueve sesiones de tres horas. Cada sesión implicó responsabilidades de lectura en casa y observaciones y registros hechos en los grupos de preescolar que atendían las educadoras participantes, luego presentados y discutidos ante el grupo; las observaciones y registros eran utilizados para ejemplificar el contenido temático de las lecturas y para obtener los diagnósticos necesarios para la elaboración posterior de la estrategia didáctica a construir en relación con la noción de espacio.

2. Algunas aspectos importantes que se encontraron en el transcurso de los trabajos fueron:

- Al hacer énfasis sobre la relación entre los objetivos del curso y los del programa de preescolar, los bloques de juegos y actividades relacionadas con la matemática y dentro de éste, con el espacio, las educadoras afirmaron que sí tenían relación. Sin embargo, al trabajar el tema referido al esquema corporal y hacer precisiones explícitas entre psicomotricidad, esquema corporal y espacio, las expresiones, actitudes y respuestas de las educadoras mostraban que la gran mayoría no tenían claras dichas relaciones, ya que por ejemplo, no conocían el nombre de todas las partes del cuerpo, no tenían registros completos ni organizados sobre los diversos aspectos de psicomotricidad gruesa y fina de sus alumnos, no habían detectado sus diversas dominancias en la lateralidad, hacían diagnósticos apresurados sobre sus niños, no habían relacionado la conceptualización o interiorización de las acciones que se requiere efectuar para tomar conciencia del esquema corporal, ni cómo el dibujo es un medio de expresarlo.
- Cuando se trabajó sobre la génesis de la construcción de las estructuras espaciales por el niño, la casi totalidad de participantes aceptó su desconocimiento sobre el tema, lo cual pudo comprobarse porque la lectura que se adjudicó no era interpretada adecuadamente, a pesar de que como ellas expresaban "la habían leído muchísimas veces". Lo anterior obligó a ir complementando, por parte de las conductoras del curso, la exposición que por equipo se hacía; a pedirles que usaran materiales concretos para explicar y que lo hicieran demostrando lo que decían. De esta manera fue como pudieron hacerse un poco más significativas las lecturas realizadas y aunque el proceso fue lento, el interés aumentó, en lugar de disminuir.
- Al pedir la elaboración del diseño de la estrategia constructivista para trabajar con sus niños contenidos relacionados con el espacio, respetando el proyecto que en esos momentos estuvieran desarrollando se vivió un estado crítico, ya que al discutir uno de los trabajos analizándolo colectivamente en el gran grupo, se les hicieron notar las inongruencias conceptuales en que sus acciones diseñadas caían al no respetar los intereses de los niños, la falta de diagnósticos iniciales o los diagnósticos parciales de los que partían, pues no detectaban la zona de desarrollo real en los alumnos, la dificultad para marcarle objetivos

específicos a sus estrategias, la no identificación de contenidos científicos sobre el espacio (contenidos disciplinarios geométricos), el olvido en que dejaban marcar la zona de desarrollo próximo a que querían que llegaran los niños con las actividades por realizar, la ausencia del andamiaje representado por los materiales, actividades e interacciones que se propondrían para ayudar el avance hacia zona de desarrollo próximo, la ausencia de un proceso de evaluación que dijera concretamente qué, cómo, con qué y para qué iban a evaluar, en síntesis, el descubrimiento y aceptación explícita que hicieron respecto a que no sabían elaborar estrategias didácticas, mucho menos constructuctivistas.

## VI. Evaluacion final

*La revisión de los documentos con las estrategias presentaron los siguientes resultados:*

A. Se esperaba la presentación de 27 trabajos, ya que de las 32 educadoras inscritas, cinco dejaron de asistir por problemas familiares o laborales, pero sólo 19 de ellas lo entregaron.

B. Los 19 trabajos elaborados pudieron caracterizarse bajo tres categorías:

1. Estrategia completa y congruente (2); 2.Estrategia incompleta: identifican zona de desarrollo real, pero falta marcar zona de desarrollo próximo, andamiaje y/o evaluación o hay incongruencia en ellos.(8); 3.Estrategia incompleta e incongruente (9).

*La revisión de los trabajos permitió corroborar que:*

- No hubo una completa comprensión sobre la construcción del espacio topológico con sus estructuras de vecindad, separación, envoltura y continuidad.
- No distinguen estadios y niveles en la génesis constructiva infantil del espacio.
- Al no distinguir niveles y subniveles de construcción, no determinan la Zona de desarrollo próximo y por tanto tampoco plantean el Andamiaje y si lo hacen es incongruente.
- No saben plantear los objetivos a las propuestas. Confunden objetivos generales del nivel preescolar con los específicos a lograr con una propuesta didáctica.
- No distinguen los contenidos disciplinarios de la Geometría que van a ser utilizados en las actividades.
- Sólo hacen una exposición discursiva sobre la evaluación, pero no dicen qué van a evaluar concretamente, ni dicen cómo y con qué instrumentos, pues no los presentan en el trabajo.
- Algunos trabajos sólo diseñaron la estrategia, pero no la aplicaron, ni por tanto, la evaluaron.

- La redacción que presentan los trabajos, en la casi totalidad del grupo, es bastante deficiente: no respetan ortografía, concordancias, estructuración de párrafos, uso de preposiciones y conjunciones.

Del instrumento de **autoevaluación individual escrita**, se obtuvo la siguiente información:

- En relación con los objetivos de aplicar principios constructivistas a estrategias didácticas para la enseñanza de nociones geométricas y demostrar congruencia entre teoría y práctica, la respuesta de casi todas fue **haberlo logrado a medias**, puesto que les faltó conocimiento y comprensión de las génesis de construcción lógica que los niños hacen del espacio.
- El objetivo de preocuparse por transformar prácticas docentes acríticas y rutinarias **todas** afirman enfáticamente **haberlo logrado.**
- **Otros objetivos** que manifestaron **haber logrado también**, fueron: **a.** Conocer mejor a los niños con los que trabajan **b.** Respetar los intereses de sus alumnos. **c.** Comprender el término Geometría en preescolar y su relación con la psicomotricidad. **d.** Aprender de sus errores. **e.** Interesarse por comprender mejor las lecturas. **f.** Inquietud por mejorar su trabajo.
- Pedirles contrastar la relación entre Psicomotricidad y Geometría que hicieron al principio del curso y determinar qué cambiarían, mostró que **ahora hacían precisiones** que al inicio no tenían.
- Sobre los trabajos **para acreditar,** todas coinciden en afirmar que **la estrategia didáctica** se le hizo **muy compleja y difícil**, que necesitan más tiempo y mayor apoyo para realizarla.

**Conclusiones y recomendaciones**

- El objetivo de diseñar, aplicar y evaluar estrategias didácticas constructivistas es bastante ambicioso por lo que no puede lograrse con un curso de 40 horas, dada la ausencia de estructuras significativas al respecto, entre las educadoras del nivel preescolar.
- Es conveniente por tanto, aceptar la sugerencia que hacen respecto a ofrecer este tipo de apoyo actualizador a través de un diplomado o incluso una especialización, centrado en la relación práctica-teoría-práctica del trabajo docente efectuado por los educadores y educadoras de este nivel educativo. Asimismo es importante que en el proyecto que se les ofrezca no sólo se atienda al aspecto Geometría, sino que se extienda al otro aspecto de la matemática, que es la aritmética en el preescolar.
- Es necesario hacer notar a las autoridades educativas y miembros de los colectivos escolares de preescolar, que muy probablemente la formación docente que poseen educadoras y educadores presenta vacíos importantes que impiden una aplicación congruente del programa 1992,

pero que la mayor gravedad del asunto se concentra en que ellos consideran que su práctica sí cumple congruentemente con la fundamentación teórica programática. Lo anterior pudo verse reflejado en este curso cuando al analizar orientaciones pedagógicas tradicionales, empiristas y constructivistas las educadoras participantes identificaron el trabajo que efectúan dentro de los modelos tradicional y empirista, pero no constructivista, y aceptaron asimismo, no haberse dado cuenta antes, por no tener referentes teórico-prácticos interpretativos pertinentes.

- De vital importancia es enfatizar que al trabajar psicomotricidad para la construcción de la noción espacial en el niño preescolar, pudieron establecerse consciente y significativamente relaciones determinantes entre el desarrollo psicomotriz y el desarrollo del lenguaje y expresión infantil e incluso del desarrollo general, pues las educadoras participantes en el curso si bien aceptaron hacer una multiplicidad de actividades sugeridas en el programa y exigidas por sus autoridades, también aceptaron no siempre saber para qué las están haciendo, provocando con ello un simple activismo y entretención de los niños, pero no un desarrollo orientado a una integración de personalidad.

**Referencias bibliográficas:**


- **Comelas, M.J., Perpenya, A.** (1984) *La psicomotricidad en Preescolar.* Ediciones CEAC.España
- **SEP/CONALTE** (1972). "Educación Física" en: *Plan y Programas de estudio para la Educación Primaria. Primer grado.* . México
- (1988). *"Geometría"* en: *Enciclopedia Práctica de Pedagogía.* Vol. 3, Edit. Planeta. España. pp. 127-135.
- **SEP** (1994). "La concepción del espacio" en: *Programa para abatir el rezago educativo.*. México pp. 112-116.
- (1994) *Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* San José, Costa Rica.

# Formación del docente de matemática del nivel medio en geometría euclidiana

*Juan M. Nole*
*Universidad de Panamá (Cimecne) y*
*Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología E Innovación (Senacyt) Panamá*

**Introducción.** (Antecedentes e Hipótesis)

En esta investigación aplicamos una prueba diagnóstica, que es el complemento de la encuesta sobre "Posibles causas que afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría euclidiana en Panamá", [1]en el sentido de diagnosticar de manera objetiva la formación del docente a nivel medio con respecto a conocimientos básicos de la geometría euclidiana plana y del espacio, y el uso de la intuición geométrica en el razonamiento.

Motivados por la opinión general en la comunidad, que la geometría no se enseña en los colegios oficiales, conjeturamos que los docentes de estos colegios presentan algunas dificultades para la enseñanza de la geometría euclidiana sin coordenadas.

**Justificación**

Es necesario la aplicación de una prueba diagnóstica a los docentes del nivel medio, para detectar las probables dificultades que poseen en nociones básicas de la geometría euclidiana, así como en el razonamiento intuitivo. Los resultados que se obtengan va a señalar de manera real la necesidad de un programa de actualización para profesores en ejercicio en geometría euclidiana y en didáctica de la geometría.

**Características del problema**

La formación en geometría euclidiana de los estudiantes en el nivel medio es deficiente. Una de las probables dificultades del aprendizaje de la geometría en el primer ciclo podría se la formación insuficiente del docente para la enseñanza de la misma.

Entonces el problema básico consiste en formular la siguiente pregunta:

¿Ha incidido en la débil formación que tienen los estudiantes en geometría euclidiana sin coordenadas, las dificultades que probablemente presentan los docentes de matemática para la enseñanza de esa área de la matemática?

**Objetivo general**

Obtener una referencia de los conocimientos del docente de matemática del nivel medio sobre la geometría euclidiana plana y en el espacio.

**Metodología**

Elaboramos una prueba diagnóstica en el nivel de razonamiento intuitivo (informal), que luego se aplicó al 26.48% (152) del total (574) de profesores de matemática que trabajaron bajo la Supervisión de la Dirección Nacional

[1] Esta encuesta se aplicó a una población 166 profesores que laboran en 1995 bajo la Supervisión de la Dirección Nacional de Secundaria Académica.

de Secundaria Académica, durante el año 1995. El total de colegios en que se aplicó la prueba diagnóstica fue de cuarenta(40) en siete (7) provincias.

**Descripción de la prueba diagnostica**

La prueba consta de 12 partes. Este instrumento de medición nos permite determinar los siguientes objetivos:

1. Reconocer dentro de un conjunto de figuras, aquellas que corresponden a sólidos.
2. Identificar el número exacto de triángulos comprendidos en el contexto de una figura triangular.
3. Seleccionar correctamente en un conjunto de cubos, aquel cuyo volumen corresponde a un tercio del volumen de un paralelepípedo dado.
4. Identificar el número de pirámides que están inscritas en un cubo, de acuerdo a los datos del problema.
5. Determinar el valor del ángulo formado por las diagonales de dos caras no paralelas de un cubo.
6. Señalar en un cubo elementos de las siguientes nociones: paralelismo, rectas cruzadas, perpendicularidad, puntos no coplanarios o simetría respecto a un punto.
7. Reconocer en un conjunto de ilustraciones que representan movimientos de rotación y reflexión, cual corresponde a cada caso.
8. Seleccionar en un conjunto de ilustraciones que representan varios movimientos, aquellos que corresponden a una reflexión.
9. Seleccionar correctamente entre varias alternativas la imagen de un cubo respecto a un plano de simetría.
10. Reconocer en un conjunto de parejas de figuras geométricas, aquellas que son análogas.
11. Resolver un problema concreto de cálculo de radios y de áreas de círculos.
12. Resolver un problema concreto de cálculo de radios y volúmenes de esferas.

**Resultados**

1. El cubo, la esfera y la pirámide fueron seleccionados correctamente, por arriba del 86%. Sin embargo el 82.50% reconocieron solamente los tres sólidos y no seleccionaron otras figuras.
2. Un porcentaje bajo (41.44%) logró observar la cantidad exacta de triángulos (12) en una figura triangular.
3. Un porcentaje bajo (44.66%) acertaron en determinar por observación (simple inspección) la cantidad exacta de pirámides trazadas en un cubo y un porcentaje bajo también (32.23%) observaron que existe alguna relación entre los volúmenes de dicha pirámide.

4. Un 89.47% acertaron en la selección del cubo cuyo volumen corresponde a un tercio del volumen de un paralelepípedo dado.
5. Un porcentaje muy bajo (17.10%) acertaron seleccionando correctamente que el ángulo formado por las diagonales de dos caras no paralelas de un cubo es 60° grados.
6. En un cubo señalaron correctamente:
   6.1. Dos rectas paralelas que no pertenezcan a un misma cara, el 80.26%
   6.2. Dos rectas que no sean paralelas, ni se corten, el 76.97%.
   6.3. Dos rectas perpendiculares que no se cortan, el 44.73%.
   6.4. Cuatro puntos que no estén en un plano, el 28:94%.
   6.5. Dos rectas que no se corten en un punto que no sea un vértice, el 25.65%.
   6.6. Una recta perpendicular a una diagonal dada de una de las caras, el 46.71%.
   6.7. El simétrico de un vértice dado con respeto al punto de intersección de dos diagonales del cubo, el 35.52%.
7. En la presentación de movimientos de rotación y reflexión.
   7.1. El 20.39% confundió una rotación en el plano con una reflexión. El 23.69% no contestó la pregunta.
   7.2. El 36.10% confundió una reflexión en el plano con una rotación. El 22.36% no contestó la pregunta.
   7.3. EL 73.68% acertaron que uno de los movimientos dados es una rotación alrededor de un eje. El 21.74% no contestó la pregunta
   7.4. El 71.71% acertaron que uno de los movimientos dados es una reflexión (reflexión especular respecto a un plano). El 23.02% no contestó la pregunta.
   7.5. El 69.73% acertaron que otros de los movimientos es una rotación. El 23.02% no contesto la pregunta.
   7.6. El 48.02% confundieron una reflexión con una rotación en el espacio. El 23.02% no contestó la pregunta.
8. En un conjunto de movimientos, donde había que seleccionar una reflexión, el 55.26% seleccionó incorrectamente el movimiento de traslación.
9. El 46.71% acertaron seleccionando correctamente la alternativa que corresponden a la imagen de un cubo respecto a un plano. El 33.55% no contestó esta pregunta.
10. Las parejas de figuras análogas más seleccionadas fueron:
    a- El paralelogramo y el paralelepípedo (61.84%)
    b- El triángulo y la pirámide (61.84%)

11. El 48.68% y el 53.28% no presentó, dificultades en el cálculo del radio y el área de un círculo respectivamente.
12. El 33.55% y el 34.86% no presentó, dificultades en el cálculo del radio y el volumen de una esfera.

**Análisis de los resultados**

1. Solamente un 82% de los profesores reconoció los tres sólidos, sin confundirse con figuras planas; el resto presentó dificultades al seleccionar figuras planas y sólidos a la vez.
2. En general, los profesores mostraron dificultad en:
   - 2.1. Observar y contar la cantidad de triángulos contenidos en una figura triangular.
   - 2.2. Determinar por simple inspección la cantidad exactas de pirámides trazadas en un cubo y la existencia de alguna relación entre los volúmenes de dichas pirámides.
   - 2.3. Las siguientes nociones o propiedades, perpendicularidad en el espacio, cuatro puntos no coplanarios, en todo paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de cada una de ellas, simetría respecto a un punto en el espacio, rectas cruzadas en el espacio.
   - 2.4. Reconocer todas las parejas de figuras análogas presentadas, como tales.
3. En general, los profesores mostraron menos dificultad en confundir una rotación en el espacio alrededor de una recta con una reflexión, una reflexión respecto a un plano osculador con una rotación.
4. El movimiento con el que más se confundieron los profesores es el de una rotación en el espacio alrededor de una recta. En general lo confundieron con una reflexión.
5. Alrededor de un 50% de los profesores presentaron dificultades en:
   - 5.1. la selección de figuras que corresponden a una reflexión. Tienden a confundir la reflexión con una traslación.
   - 5.2. La resolución de problemas de cálculo del área de un círculo, volumen de una esfera y radio de ambos objetos geométricos.

**Conclusión**

Del análisis del resultado concluimos que en general los profesores de matemáticas del nivel medio mostraron desconocimiento de nociones básicas de la geometría euclidiana (en el plano y en el espacio) y dificultades en el razonamiento geométrico intuitivo. Por lo tanto se infiere de manera natural que estas deficiencias en geometría en los docentes es una de las posibles causas que afectan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría euclidiana en Panamá.

## Recomendaciones

Para satisfacer las necesidades del profesorado del nivel medio en relación a la actualización académica, que conduzca al mejoramiento y modernización del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, recomendamos la creación de un programa de actualización para profesores en ejercicio en el área de la geometría.

## Referencias bibliográficas.


- **Hernández, M.** (1985). *Un estudio cuasi-experimental para detectar, como estudiantes de la licenciatura en matemática reconocen la noción de analogía en geometría.* Trabajo de graduación para optar por el título de Licenciada en Matemática. Universidad de Panamá.
- **Ministerio de Educación de la República de Panamá.** *Programas Oficiales de Matemáticas en el Area de Geometría correspondiente al primero, segundo y el tercer año.*
- **Nole, J. y Galástica, N.** (1994). La Noción de Simetría en los Poliedros Regulares. Informe de Investigación de las *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.*
- **Pogorelov, A.** (1974). *Geometría elemental.* Editorial MIR, Moscu.

# La discusión matemática en un ambiente de resolución de problemas

*Blanca Ruiz Hernández (ITESM-CEM), Enrique Minor Campa (CECyT 3-IPN),*
*Liliana Suárez Téllez (CECyT 11-IPN), José Luis Torres Guerrero (CECyT 7-IPN),*
*Javier Lezama Andalón (CECyT 9-IPN), Désirée Alvarado Paz (CECyT 7-IPN),*
*Ernesto Sánchez Sánchez (DME, CINVESTAV) y Pedro Ortega Cuenca (CECyT 11-IPN)*

En este trabajo nos ocupamos de la presentación y la discusión de las soluciones de los problemas que se realizan cuando los equipos comparten sus soluciones con los otros equipos. Este proyecto forma parte de un programa de investigación que trata sobre el papel de la resolución de problemas en el desarrollo de la cultura matemática de los estudiantes de nivel medio superior (15-17 años) en el Instituto Politécnico Nacional de México. En la primera etapa diseñamos un taller extracurricular de resolución de problemas cuyo propósito es preparar algunas de las situaciones típicas del Cálculo; consideramos además algunos aprendizajes en otros aspectos como el trabajo en equipo, la elaboración de reportes y la discusión matemática. En este escenario exploramos las características de un ambiente de resolución de problemas desde perspectivas distintas.

Algunas de las preguntas relativas a la discusión matemática que tratamos de responder son:

- ¿Cuáles son las características de la discusión posterior a la resolución de los problemas en los equipos?
- ¿Cuáles son las características de la participación del profesor durante la discusión matemática?

En cada sesión del taller se resuelven problemas (uno o dos) en equipos (de tres o cuatro personas), cada equipo elabora un reporte que registra el proceso de solución, y después se presentan y discuten las soluciones con todo el grupo. Escogimos y elaboramos cada uno de los problemas de las sesiones a partir de una situación problemática embrionaria que analizamos desde un marco que desarrollamos; los resultados de este análisis son varios documentos que concretan la planeación. En la figura 1 se describe la planeación de un problema. Particularmente, 'el guión de la discusión' es un marco flexible para la coordinación de la discusión. El conjunto de problemas conforma una red con un propósito general, preparar las situaciones típicas del Cálculo en el doble sentido de propiciar el uso articulado de las matemáticas previas al Cálculo y propiciar la formulación de preguntas que tendrán respuesta en los cursos de Cálculo, y aprendizajes en varias dimensiones. La idea de que los documentos sirvan para historiar las puestas en escena del problema es inseparable del papel que aquí se le reconoce al profesor como el productor de sus propios saberes y prácticas, cada puesta en escena le permite incorporar información sobre el potencial de las interacciones de los alumnos acerca del problema, como se ilustra en la figura 2.

La continuación de este proyecto se ha dado en varios escenarios, que incluyen la aplicación en un contexto curricular de la 'Red de problemas que prepara algunas situaciones típicas del Cálculo' en los tres primeros semestres de nivel medio superior (15-16 años), algunos espacios de actualización docente (talleres, diplomado y especialidad) para el diseño e instrumentación de redes de problemas vinculadas con objetivos curriculares, y el diseño e instrumentación de una nueva etapa del taller en la que se incorporaron, además de las calculadoras con poder de graficación que ya se usan, otras herramientas tecnológicas, como el CBL (Calculator-Based Laboratory) que permite la generación de datos reales en el salón de clases y su uso en la simulación para la exploración y modelación de situaciones.

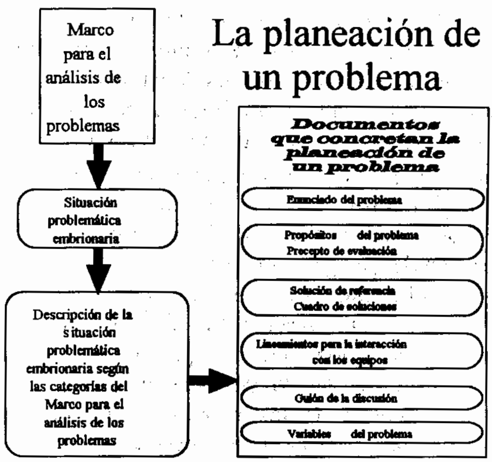



*Figura 1. 'La planeación de un problema'*

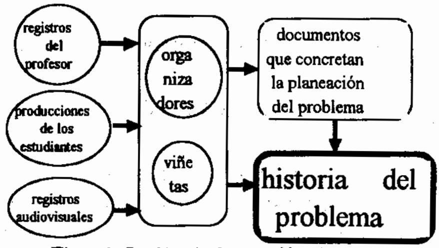



*Figura 2. 'La historia de un problema'*

En cada etapa hemos usado los marcos para convertir los registros en datos que nos han servido, mediante el contraste entre los análisis previo y posterior, para esbozar algunas respuestas a las preguntas de investigación pero, principalmente, la experiencia nos dio la oportunidad de precisar algunos de los cuestionamientos para generar una serie de preguntas en otros niveles. También aprovechamos la evidencia de algunos datos impugnativos de nuestros supuestos para formular preguntas nuevas que esperamos responder e incorporar sus resultados en los marcos. Hemos formulado lo que llamamos 'núcleos de conclusiones' acerca de la discusión; que esperamos concretar en preguntas y desarrollos más específicos.

En las primeras etapas de este proyecto, a partir de una definición operativa de la 'discusión matemática' y de una serie de supuestos explícitos en nuestros marcos de referencia, hemos identificado algunos fenómenos y descrito algunas pautas. Con los nuevos marcos, que elaboramos en el diseño de las experiencias en los escenarios de actualización docente y curricular, tenemos herramientas nuevas y preguntas más precisas. La organización de los marcos alrededor del carácter dual de la discusión ('se discute para aprender matemáticas' y 'se aprende a discutir') nos permite, por un lado, profundizar en el conocimiento específico del papel de la discusión en un ambiente de resolución de problemas relativo a un problema como parte de una red con propósitos bien definidos y, por otro lado, precisar la parte que corresponde al aprendizaje de la discusión en su dimensión matemática y reconocer la importancia de la articulación con otros saberes en los plazos prolongados que se requieren para su desarrollo.

En estas primeras etapas de la investigación, el estudio de la discusión tiene un carácter exploratorio, así que nuestro cometido es describir las interacciones que ocurren, tratando de identificar algunas pautas. Estas pautas nos servirán de guía para construir marcos que nos permitan describir mejor, y de ser posible explicar, la forma en que se originan los fenómenos que ocurren durante la presentación y la discusión de las soluciones de los problemas después del trabajo en los equipos. Esta investigación tiene un destinatario: el profesor. Así la perspectiva que se privilegia es la del profesor, aunque algunos de los marcos se pueden compartir con los estudiantes como un recurso para aprender a discutir y como una orientación para participar en la creación de un ambiente de resolución de problemas.

En lo relativo a los productos también los organizamos atendiendo al carácter dual de la discusión:

**'Se discute para aprender matemáticas'**

Los productos en esta vertiente son las historias de los problemas que conforman la 'red que prepara las situaciones típicas del Cálculo', que comprenden tanto los documentos que concretan la planeación de cada problema como los organizadores y las viñetas que incorporan los resultados de las experiencias, como se describe en la figura 2.

En particular, hay algunos registros y documentos (las 'variables del problema', el 'guión de la discusión' y los nodos de decisión que se han identificado) que resultan importantes para llegar a establecer un conocimiento muy específico acerca del problema y su potencial de aprendizaje en la discusión. Sobre todo en los cuadros comparativos de las cuestiones discutidas y las cuestiones tratadas en los anexos (coactivos o voluntarios) hemos advertido que aun en discusiones muy vivas, en las que se ha avanzado significativamente en la solución del problema, o resuelto según las expectativas más optimistas, no es necesariamente un indicador de que la difusión de los principales aspectos discutidos alcance a la mayoría de los participantes. Estas evidencias constituyen datos impugnativos de nuestros supuestos y nos llevan a formular algunas preguntas más específicas acerca de cuáles son las características de la discusión que realmente garantizan una mayor difusión, de cuál es el papel de la discusión grupal o de cuáles son los aspectos de las soluciones que conviene tratar en la discusión. Entre las viñetas que hemos elaborado hay algunas que describen la discusión entre los integrantes de dos equipos que han obtenido resultados similares pero trabajando en registros de representación distintos, por ejemplo geométrico-aritmético y geométrico-algebraico, y no han podido aprovechar, a pesar de sus esfuerzos, los avances del otro equipo.

El documento que contiene 'las variables del problema' brinda una perspectiva global de los aspectos vinculados con las distintas vías de solución del problema. Además permite identificar los nodos de decisión que, por un lado, orientan las intervenciones del profesor durante el trabajo de los equipos y, por otro, le ayudan a mantener el ritmo y a decidir cuándo coagular la acción para profundizar en alguno de los aspectos del problema. Esperamos generar, a partir de este documento, unos 'mapas de solución'.

Los nodos de decisión asociados con un problema en particular son fundamentales para que el profesor coordine la discusión y aparecen en algunos documentos y registros: 'los lineamientos ...', 'el guión de la discusión' y 'las variables del problema'. Tienen, los nodos de decisión, importancia en lo relativo a la formulación o planteamiento de problemas nuevos, ya sea como una estrategia para avanzar en la solución del problema original o como una manera de profundizar o explorar ideas matemáticas, o extramatemáticas, a partir de la situación original.

**'Se aprende a discutir'**

En cuanto al aprendizaje de la discusión en un ambiente de resolución de problemas, es un aprendizaje que trasciende los cursos de matemáticas puesto que la discusión comprende conocimientos, habilidades y actitudes que se deben desarrollar a lo largo de periodos prolongados y como un propósito común de todas las asignaturas. Su importancia en el desarrollo de las habilidades de alto nivel es explícita (Resnick, 1987) y también aparece en las competencias básicas de los estudiantes de nivel medio superior. Aquí consideramos tres perspectivas: las figuras de la discusión, las modalidades de participación y las funciones, como se ilustra en la figura 3.

Algunas pautas de interacción que pudimos identificar en las sesiones son las que llamamos 'figuras de la discusión'. Las figuras de la discusión pueden ser una forma de establecer un lenguaje que contribuya a describir, explicar quizás, el funcionamiento de las interacciones que se dan durante la discusión. Hemos identificado tres modalidades de participación: individual, por equipo y grupal. Este marco resulta especialmente prometedor porque permite explicar algunas de las interacciones que resultan de los conflictos entre las modalidades. Los marcos de las modalidades de participación y sus dilemas y de las funciones que también incluyen nodos de decisión (con la dialéctica del ritmo y la coagulación, que sirve de puente entre las dos perspectivas que hemos separado para su análisis) y las 'figuras de la discusión' son herramientas que contribuyen a que los profesores puedan coordinar con provecho una discusión en un ambiente de resolución de problemas. También hemos diseñado un formato que incluye cinco criterios de autoevaluación relativos a la presentación y la discusión de las soluciones después del trabajo en los equipos, que naturalmente se integrará a los 'Auxiliares para la organización del aprendizaje'.

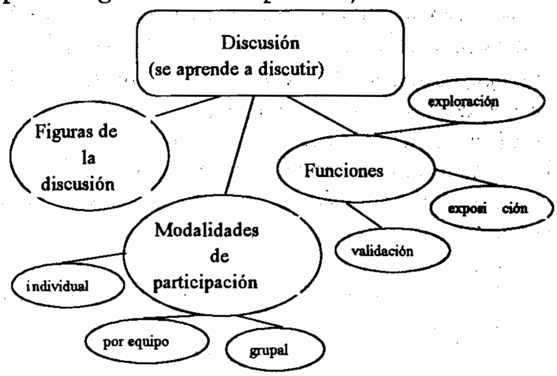



*Figura 3. Se aprende a discutir.*

## Palabras claves (reconocidas por la comunidad de Matemática Educativa):

**discusión-matemática; resolución-de-problemas; redes-de-problemas**

### Referencias bibliográficas:


- **Alarcón, J.** (1995) *Notas del Seminario 'Precálculo y RP.'* DME-CINVESTAV-IPN.
- **Desforgues, C.** (1989) Classrooms processes and Mathematical Discussions. En Ernest, P. (Ed.) *Mathematics Teaching. The State of the Art.* The Falmer Press.
- **Lincoln, Y.& Guba, E.** (1986) *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park, CA: Sage.
- **Pirie, S. & Schwarzenberger, R.** (1988) Mathematical Discussion and Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*, pp. 459-470. Kluwer Academic Publishers.
- **Pirie, S. and Kieren, T.** (1992) Creating constructivist environments: constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23(5)*, pp. 505-528.
- **Resnick, L.** (1987). *Education and learning to think.* Washington, DC: National Academy Press.

# DESARROLLO DE CURRICULUM

# Desarrollo de un curriculum de geometría basado en la teoría de los Van Hiele. Problemática del profesorado

*Afonso, C; Camacho, M.; Socas, M. M.*
*Universidad de La Laguna. Tenerife. España*

## Resumen

*En este trabajo presentamos un estudio sobre once profesores en activo. Mediante la combinación de diferentes instrumentos como tests, para determinar el nivel de razonamiento geométrico de los profesores, entrevistas estructuradas, guiones de unidades de aprendizaje y videograbaciones de sesiones de clase, analizamos sus experiencias y comportamientos sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría y estudiamos la adecuación o no del estilo de estos profesores al tipo de profesor que se supone "preparado", para desarrollar con éxito una propuesta curricular de geometría basada en el modelo de van Hiele.*

## Antecedentes

Como es sabido, la teoría de los niveles de pensamiento geométrico propuesta por los Van Hiele surge como un marco de referencia que puede contribuir a la elaboración y restructuración del currículo de Geometría para la enseñanza obligatoria (Geddes, 1992, Geddes y Fortunato, 1993, Burger y Culpepper, 1993). Este marco de referencia implica la aceptación de un cambio curricular en la Geometría, y como tal afecta a multitud de elementos, entre los que destacan de manera especial tres: la materia (La Geometría), los alumnos y los profesores.

Los van Hiele consideraron que el pensamiento matemático sigue un modelo concreto que consta de dos partes, una descriptiva en la que identifica una secuencia de tipos de razonamiento llamado los "niveles de razonamiento" a través de los cuales progresa el razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en ese campo y la otra instructiva que sugiere a los profesores directrices sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que alcancen con más facilidad un nivel superior de razonamiento, que reciben el nombre de "fases de aprendizaje". De esta forma, los niveles de razonamiento son:

Nivel 1: Reconocimiento (Visualización). Los alumnos perciben las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.

Nivel 2: Análisis. Los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.

Nivel 3: Clasificación (Abstracción). Los alumnos comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático. Son capaces de realizar razonamientos deductivos. Entienden el significado de una definición.

Nivel 4: Deducción formal (Deducción). Los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.

Nivel 5: Rigor. Los alumnos son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática. Este último nivel es el que menos investigaciones ha promovido.

Tal y como se ha indicado, los van Hiele recomiendan a los profesores de geometría que organicen esta enseñanza siguiendo unas determinadas pautas que reciben el nombre de "fases de aprendizaje". El alumno tiene que pasar por todas las fases para alcanzar un nivel de razonamiento superior. Estas fases son: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración. Fuys, Geddes y Tischler (1984) resumieron las características principales de los niveles de van Hiele de razonamiento geométrico resultando: los niveles son secuenciales; cada nivel tiene su propio lenguaje, una serie de símbolos y una red de relaciones; lo que es implícito en un nivel llega a ser explícito en el siguiente nivel; el progreso de un nivel al siguiente es más dependiente de la instrucción que de la edad o maduración biológica. Se pueden ver unas buenas descripciones del modelo en Crowley (1987); Jaime y Gutiérrez, 1990).

Las investigaciones, hasta la fecha, sobre Geometría desde la perspectiva de los Van Hiele han insistido más en una estructura y organización de los contenidos y en una mejor comprensión de los conocimientos y comportamiento de los estudiantes (Clements y Battista, 1992 ; Jaime, 1993; van Hile, 1986) que en los problemas que surgen al implementar un currículo desde la perspectiva del profesor.

**Objetivo general de la investigación**

El objeto de este trabajo, que estamos realizando con profesores en activo, forma parte de un trabajo más amplio (Afonso, Camacho y Socas, 1995 y 1997) consiste en constatar si existe o no relación entre los estilos de profesores que trabajan en nuestro sistema educativo y el profesor idóneo para desarrollar una propuesta curricular en términos de la Teoría de los Van Hiele en establecer vías que propicien cambios de actitudes en el profesorado y ayude a entender mejor la dinámica de los procesos implicados en cambios curriculares de esta naturaleza.

Presentamos aquí un estudio empírico y descriptivo con el propósito de:

a) Comparar la situación de un grupo de profesores en activo en relación a sus experiencias y comportamientos con relación a la enseñanza-aprendizaje de la Geometría.

b) Analizar la adecuación de los profesores con el tipo del profesor que se supone "preparado" para desarrollar con éxito una propuesta curricular de Geometría en términos de Van Hiele, que pensamos debe poseer algunas características tales como

1. Una formación científica en Geometría, al menos con un nivel de pensamiento geométrico superior en al que se pretende trabajar con sus alumnos.
2. Una concepción constructivista del aprendizaje en términos de investigación dirigida.

3. Capacitación para trabajar con alumnos que presenten un alto grado de heterogeneidad en destrezas básicas, intereses y necesidades en Geometría.
4. Una concepción del currículo de Geometría como un instrumento de investigación que permite desarrollar los diferentes niveles de razonamiento geométrico.
5. Una valoración y ejercitación del trabajo en equipo.

**Método e instrumentos**

Estudiamos 11 profesores en activo de nueve centros distintos, impartiendo docencia en los grados 4-7 (10-13 años) mediante una metodología básicamente cualitativa donde se combinan instrumentos que nos permiten determinar el nivel de pensamiento geométrico de los profesores (Tests de Usiskin, 1982 y Jaime, 1993) y entrevistas estructuradas con protocolos cerrados, con instrumentos que permiten estudios mediante un análisis puramente interpretativo de sesiones de clase habituales mediante videograbaciones y el análisis de los guiones de las unidades de aprendizaje empleados por los profesores.

Los instrumentos de recogida de información que hemos utilizado son:

**1.- Entrevista estructurada con protocolos cerrados** con preguntas de respuesta abierta, que permiten obtener información sobre las diferencias individuales (D.I.), sobre las limitaciones institucionales (L.I.), sobre la naturaleza de la tarea (N.T.) que proponen a sus alumnos en Geometría, sobre sus opiniones acerca de los estudiantes (J.P.E.) y del contenido geométrico (J.P.C.) y sobre el tipo de decisiones que con relación a la enseñanza y al aprendizaje de la Geometría deben tener (D. D), adaptada del modelo de Shavelson y Stern (1981)

En la categoría decisiones didácticas (D.D.) se analizan las prácticas docentes de los profesores de Geometría y relacionamos sus estilos en clase de Geometría. Adaptamos la terminología usada por Porlán (1993), tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa, para identificar los estilos de los profesores estudiados en este trabajo, aunque unificamos las tendencias espontaneístas e investigativa por no tener elementos suficientes para diferenciarlos con los instrumentos usados.

**2.- Tests para determinar el nivel de pensamiento geométrico de los profesores** (Usiskin, 1982-TU- y Jaime, 1993 -TJ). Aunque existen diferentes instrumentos de diagnóstico para evaluar los niveles de razonamiento, (Mayberry, 1981; Usiskin, 1982, Crowley, 1989; Jaime, 1993; Gutiérrez y Jaime, 1995) utilizados con más o menos éxito en distintas investigaciones, hemos optado por elegir ambos tests, por dos razones principales:

a) Determinar, admitiendo la hipótesis de continuidad de la Teoría de los van Hiele, el grado de adquisición que poseen los profesores.

b) Comparar la información que nos suministran dos intrumentos de diagnóstico que parten de hipótesis contrarias (discretitud y continuidad) y constrastar los resultados.

**3.- Guión de la clase**, que se solicita a cada profesor previo a su actuación de clase (prediseño), lo que nos permite analizar el tipo de decisiones que tiene que tomar el profesor en el desarrollo de las clases (videograbadas) a partir de las previsiones iniciales (guión). La estructuración del guión nos va a permitir considerar el tipo de organización previa de los profesores: organización conceptual o curricular.

Entendemos por organización conceptual cuando el contenido está considerado como un elemento fundamentalmente instructivo y está organizado desde el punto de vista de la lógica interna del mismo.

Entendemos por organización curricular cuando el contenido está considerado como un elemento fundamentalmente educativo y está organizado desde una perspectiva curricular. Es decir, el contenido es considerado desde una organización epistemológica y fenomenológica, como un instrumento educativo para alcanzar determinadas capacidades, que requiere además una organización pedagógica y didáctica (Metodología) y de una organización del proceso evaluador para medir las capacidades adquiridas.

**4.- Vídeograbaciones** de dos sesiones de una hora de clase desarrollados por los profesores y las observaciones obtenidas por la presencia en el aula de un observador externo. El análisis de la clase por el observador externo y el análisis de las transcripciones de las vídeograbaciones se realiza utilizando el guión de observación adaptado del de Walker, R. (1984). En este trabajo consideramos las categorías: alumnos (agrupamientos, motivación y participación en las tareas), profesores (vocabulario matemático adecuado, respuesta del profesorado a las preguntas de los alumnos y distribución para el trabajo en el aula), recursos (libros de texto, materiales escritos, materiales gráficos materiales manipulativos y otros recursos) y desarrollo de la unidad de aprendizaje (qué enseña: conceptos, procedimientos o actitudes, cómo organiza la tarea y cuál es el papel del profesor en el desarrollo de la tarea).

## Resultados y Conclusiones

Es necesario indicar que la búsqueda de profesorado dispuesto a realizar experiencias educativas que implique la implantación de un diseño innovador como es la propuesta de los Van Hiele tiene dificultades; ello hace que no podamos hablar de azar en la elección de los 11 profesores que participan en la investigación.

Si establecemos relaciones entre los resultados obtenidos por los instrumentos utilizados y el estilo de profesor idóneo, como se recoge en el esquema siguiente:

| Perfil del Profesor | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.Formación científica (Nivel de razonamiento geométrico) | 3-4 | 2-3 | (TU) 1* | (TU) 2* | 3-4 | 2-3 | 2 | 2 | (TU) 2* | (TU) 2* | 2-3 |
| 2.Investigación dirigida | sí | sí | no | sí | no | no | no | sí | no | no | no |
| 3.Respetar la heterogeneidad de la clase | no | no | no | no | sí-no | sí-no | sí-no | sí-no | sí | sí | sí |
| 4. Organización de la Geometría desde una perspectiva curricular | sí | sí | no | sí | no | no | no | sí | no | no | no |
| 5. Trabajo en grupo | no | sí | sí | no | no | no | no | sí | no | no | no |

Nos encontramos que el profesor 1 es un profesor idóneo para desarrollar un currículo desde la perspectiva de Van Hiele si fomentamos en él , el trabajo en grupo y el respeto a la heterogeneidad de la clase, a pesar de hacer una enseñanza efectiva y fuertemente individualizada.

El profesor 5, a pesar de poseer un nivel de pensamiento adecuado (3-4), posee sentido rutinario de las actividades y mero transmisor del conocimiento, poca valoración del trabajo en grupo, una excesiva estandarización en sus clases y una concepción excesivamente conceptual del currículo, lo que aparece como un profesor con dificultades para desarrollar una propuesta en términos de los Van Hiele.

La observación de los resultados para el resto de los profesores nos permiten establecer que la epistemología del profesorado se muestra como un elemento que puede ofrecer grandes dificultades a la hora de implementar un currículo de Geometría desde la perspectiva de los van Hiele, por los diferentes desequilibrios que se dan con relación a las cinco categorías que conforman al profesor idóneo.

Para afrontar con ciertas garantías estas innovaciones curriculares es necesario implementar con anterioridad programas globales de actuación en la formación del profesorado, que no sean específicamente una parte local del currículo a desarrollar, ni un recetario sobre cómo ejecutar un plan elaborado para los van Hiele, sino que sea una interpretación, justificación y orientación desde la práctica misma (inmersión) de las transformaciones necesarias para desarrollar con grarantías un currículo de geometría desde el punto de vista de los van Hiele.

**Referencias bibliográficas:**


- **Afonso, M.C.; Camacho, M. y Socas, MM**. (1995). Some difficulties in the development of the geometry curriculum according to Van Hiele. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol 1, p. 191. Brasil.
- **Afonso, M. C., Camacho, M. and Socas, M..M**. (1997) The implementation of a microcurriculum: angles, measurements and rotations from the point of view of van Hiele. In Pehkonen, E. (ed.). *Proceedings of the 21th Conference of the International Group of PME. Finland*, vol 1, p.216.
- **Burger, W. F.; Culpepper B..** (1993) Restructuring Geometry: En Wilson, P. (ed) *Research ideas for the classroom. High School Mathematics Mathematics*. Macmillan Publishing Company. New York. pp. 140-153.

# TEORÍA Y METODOLOGÍA

# La relación de cambios y totales en tablas y gráficas: Un estudio con alumnos de secundaria.

*Bonifacio Pinzón Turiján y Simón Mochón*
*Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.*

**Propósito:**

En la presente investigación se pretende identificar y describir las habilidades y dificultades que presentan los estudiantes del tercer grado de secundaria, al construir la variación de una cantidad partiendo de la variación de su razón de cambio y viceversa. Ambas situaciones representadas numérica y gráficamente.

**Antecedentes:**

Un aspecto importante del curriculum de las matemáticas es el análisis de las situaciones del mundo real, a través de la exploración y construcción de modelos matemáticos. Un reciente acercamiento a esta actividad de matematizar, para el propósito educativo es representar, de una forma gráfica, relaciones de las cantidades involucradas en la situación.

Schwartz y Yerushalmy (1995), quienes encontraron que las gráficas (si se llegan a estudiar), son siempre la última representación utilizada, y se ven con frecuencia sólo como una consecuencia visual del manipular símbolos y números.

Chazan (1994), menciona que se puede invertir el orden comenzando con situaciones reales representadas en gráficas cualitativas. Donde estas gráficas posteriormente se pueden analizar y expresar en forma de lenguaje natural.

Dentro de un acercamiento gráfico, un tema que ha ganado mucha atención en la educación de las matemáticas, es el estudio de cambios y situaciones de variación (por ejemplo el Proyecto SimCal, desarrollado por el Dr. James Kaput de la Universidad de Massachusetts en Dartmouth). Donde las principales ideas contenidas en este tema son razones variables de cambio, sus acumulaciones y como esas dos cantidades están relacionadas la una con la otra.

Al respecto Elfriede Wenzelburger en sus cuadernos de Didáctica de Cálculo Diferencial e Integral propone desarrollar los conceptos de razones de cambio y efectos de razones de cambio partiendo de nociones intuitivas que estén presentes en la vida diaria o cercanos a experiencias vividas por los alumnos.

El modelaje matemático, debe incorporarse en la secuencia de aprendizaje matemático por dos razones: ejemplificación y aplicación (Nesher, 1989, de Lange, 1987). Es esta segunda razón la que normalmente se ofrece para justificar su introducción en problemas de aritmética, álgebra y cálculo. Estos modelos ofrecen a los estudiantes una oportunidad para analizar situaciones aplicadas y matematizarlas utilizando el lenguaje simbólico que hayan aprendido. Sin embargo, dentro del lenguaje simbólico, la representación gráfica y numérica la realizan muy poco.

**Metodología:**

La metodología empleada en este trabajo de investigación es de corte cualitativo. El motivo de tomar éste tipo de metodología, es detectar en forma objetiva las habilidades y dificultades que presentan los sujetos al trabajar con la elaboración, lectura e interpretación de tablas y gráficas sobre los contenidos de cambios (razones de cambio) y totales (sumas de razones de cambio).

Para éste propósito primero se procedió a la elaboración de un cuestionario constituido por 10 problemas, sobre razones de variación de una cantidad expresada en forma gráfica y en forma numérica. Este cuestionario fue aplicado a 18 estudiantes de diferentes niveles educativos, 6 sujetos de tercero de secundaria, 6 de tercer semestre de preparatoria y los 6 restantes de quinto semestre de preparatoria. Las escuelas en las cuales se aplicó el cuestionario, se encuentran ubicadas en la Delegación Cuajimalpa de la ciudad de México. El piloteo del cuestionario nos dio una idea de comparación de las habilidades y dificultades que presentan los estudiantes en estos niveles, y así de este modo poder obtener un cuestionario único para su aplicación al grupo de estudio.

La secuencia metodológica que se ha seguido durante el desarrollo de esta investigación es la siguiente: selección de 5 problemas del cuestionario piloto, los cuales se modificaron un poco, formando así un nuevo cuestionario (remitirse al apéndice para ver los contextos usados). Aplicación del cuestionario a 30 sujetos, de entre 15 y 16 años de edad, de los terceros grados de la Escuela Secundaria Federal N° 21 "José María Velasco" de Cuautitlán Izcalli, México. Tomando al azar 5 sujetos de cada uno de los 6 grados de tercero de esta escuela.

Después del análisis de los cuestionarios, fueron seleccionados 6 sujetos para la aplicación de una entrevista exploratoria, considerando a los sujetos que presentaron trabajo interesante en su cuestionario. De los cuales fueron cuatro hombres y dos mujeres.

El protocolo de la entrevista fue el mismo cuestionario. Esto se decidió después de analizar las respuestas presentadas por los alumnos. Se aplicó la entrevista a los estudiantes seleccionados. Se les proporcionó el cuestionario que habían resuelto anteriormente, pidiéndoles que explicaran y registraran los procedimientos que habían realizado o utilizado en determinadas preguntas (fueron entrevistados acerca de sus respuestas dadas en el cuestionario). Con la intención de profundizar en las ideas expuestas en el cuestionario. Las entrevistas fueron audiograbadas y cada una tuvo una duración aproximada entre 40 y 50 minutos. Por último, se realizó un análisis de los cuestionarios y de las entrevistas.

**Resultados:**

Aquí presentamos algunos de los resultados del cuestionario y la entrevista. Se encontró que los estudiantes fueron capaces de leer correctamente, tablas y gráficas dadas, pero presentaron mucha dificultad en la interpretación de éstas.

Se detectó una dificultad que presentan los estudiantes al trazar una gráfica de velocidad constante de una gráfica lineal de distancia tiempo, aún cuando ellos se dan cuenta que la velocidad no cambia con el tiempo (ver problema 3 del apéndice). La mayoría de los sujetos traza la misma gráfica de posición lineal. Esto es interesante, porque una gráfica lineal es la más "simple" que se puede tener de esta situación.

Los estudiantes al moverse de valores de razones a valores de totales caen dentro de cuatro categorías (ver problema 2 del apéndice).

a) Ignoran la condición inicial y no suman los cambios.

b) Ignoran la condición inicial pero suman los cambios.

c) Toman en cuenta la condición inicial pero no suman los cambios.

d) Toman en cuenta la condición inicial y suman los cambios.

Uno de los problemas (ver problema 5 del apéndice), contenía una gráfica de precios de una casa en diferentes intervalos de tiempo, y constaba de secciones de rectas, y una de las cuales era horizontal. En estas secciones horizontales los estudiantes no pueden interpretar o describir el cambio ocurrido.

Cuando se les presentan gráficas de razones para pasar a totales (ver problema 4 del apéndice), los estudiantes suman los valores de razones, pero no están seguros, cuándo se incluyen los puntos extremos del intervalo solicitado. Incluso algunos de ellos suman las razones en medio de los años de la gráfica dando un valor a cada mitad de año.

En las entrevistas los sujetos pueden responder algunas cuestiones de las cuales tenían dificultad en el cuestionario. Dos estudiantes que en el cuestionario no pudieron dibujar la gráfica de velocidad a partir de la gráfica de posición lineal, con la dirección del entrevistador finalmente terminan por dibujar una línea horizontal. Pueden describir el sentido de estas líneas o secciones en las gráficas, situación que era una dificultad anteriormente. También, pueden obtener los cambios de funciones lineales, o decir en cual sección hubo un cambio rápido de crecimiento. Esto muestra el efecto de la colaboración de una persona más capaz, lo cual es relevante en la teoría de Vigotsky.

**Apéndice**

A continuación se presenta una versión corta de los problemas usados en el cuestionario y la entrevista de este estudio.

1. Una enfermera lleva el control de temperatura de un paciente y registra los resultados.

| Hora | 15:00 | 16:00 | 17:00 | 18:00 | 19:00 | 20:00 | 21:00 | 22:00 | 23:00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura | 36 | 37 | 38 | 39 | 39.5 | 40 | 40 | 40 | 38 |

Se les pide a los estudiantes, los cambios de temperatura en varios intervalos de tiempo, interpretar estos datos y registrarlos en una gráfica.

2. En un invernadero se registra el aumento de la altura de dos plantas (A y B) cada semana. Este registro se inicia cuando las plantas tenían una altura de 20 cm. La tabla siguiente muestra estos aumentos.

| | Semana | Primera | Segunda | Tercera | Cuarta | Quinta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Crecimiento en cm. por cada semana | Planta A | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | Planta B | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 |

Posteriormente, se plantean algunas preguntas sobre el crecimiento de cada planta después de varias semanas. También se pide completar una tabla de crecimiento total de las plantas.

3. En este problema se da una gráfica lineal de distancia tiempo. Comienza en el origen y llega hasta los 50 metros, recorridos en 10 segundos.

Se les pide a los estudiantes que den la distancia de recorrido en algunos intervalos, y obtengan la velocidad del corredor, representándola en una gráfica.

4. En este problema se da una gráfica entre los años de 1990 y 1995 (primero creciendo y luego decreciendo), representando las ganancias de una compañía en millones de pesos (esta gráfica fue tomada de un libro de texto de secundaria).

Se les pide a los estudiantes leer e interpretar la gráfica y obtener el total de ganancias de la compañía en varios periodos de tiempo.

5. En este problema se presenta una gráfica, que representa el valor de una casa, registrado cada año, durante un intervalo de 10 años. Esta gráfica está compuesta por segmentos de línea, que primero crece, después es un segmento horizontal y por último decrece.

Primero se les pide a los estudiantes que identifiquen el cambio de valor de la casa, en varios intervalos de tiempo. Después que hagan una tabla de los valores de cambio por año.

**Referencias bibliográficas:**


- **Schwartz, J. y Yerushalmy, M.** (1995). *On the Need for Bridging Language for Methematical Modeling. For the Learning of Mathematics.*
- **Chazan, D.** (1994) Skeching Graphs of an Independent and Dependent Quantity. *Procedings of the Eighteenth of the PME*, Lisboa, Portugal.
- **Yerushalmy, M.** (1994) Mathematizing Quantitative Situations Qualitatively: An Oportunuty for Curriculum Restructuring Technology Focus Group, *PME-NA*, Baton Rouge, Louisiana.
- **Kaput, J.** (1993) The Urgent Need for Proleptic Research in the Representation of Quantitative Relationships, in T. A. Romberg, E. Fenema and T.P. Carpenter (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Funtions*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- **Wenzelburger, E.** (1993). *Cálculo Diferencial e Integral.* Grupo Editorial Iberoamérica México.

## El aprendizaje de las matemáticas. Un punto de vista cogno- afectivo

*Eréndira Valdez Coiro*
*UPN, Ajusco, D.F.*

Este trabajo presenta los resultados de una investigación que se hizo en una escuela oficial, urbana, en el Distrito Federal, Ciudad de México. Se trata de un trabajo en el que se propuso la hipótesis de que el rendimiento escolar en matemáticas y las actitudes hacia esta materia de estudio podrían estar asociados, y por las circunstancias escolares que contextúan el proceso durante la estancia de tres años, de los jóvenes estudiantes, sería interesante conocer el desarrollo de este proceso y algunas de las características más sobresalientes.

El fundamento central en este problema se deriva de la consideración de que el aspecto afectivo en el proceso de aprendizaje es determinante y que las motivaciones de los estudiantes definen en buena manera sus acercamientos, interacciones y logros en el aspecto cognitivo. Se apoya la idea de que el aprendizaje es un proceso cogno- afectivo, y es un error omitir uno de ambos aspectos. Consideramos que en el aprendizaje lo afectivo es energizador y lo cognitivo es estructurante. Uno es dinamogenético del otro.

Se tuvieron datos empíricos sobre la atención en horas de trabajo, preferencias y logros de una generación de estudiantes que manifestó las dificultades que la materia presentaba para obtener regulares calificaciones, a pesar del esfuerzo invertido en la escuela y fuera de ella, por esto, el centro de la temática de trabajo fue la relación actitud- logro-actitud

Socialmente hay una predisposición hacia la actividad escolar en Matemáticas, que parece agravarse durante los años de la educación secundaria, y por ello los estudiantes, fuera de toda perspectiva vocacional, suelen tomar decisiones que no incluyan esta materia en los estudios futuros,... hay un crecimiento de un síndrome conocido hoy día como "angustia matemática"...

Particularmente, en la adolescencia temprana que es la etapa vital de estos alumnos hay cambios significativos que posibilitan un replanteamiento positivo no sólo en lo que toca a sus actividades cotidianas, sino también en relación con sus proyectos de vida. En nuestra materia hay un severo déficit que ha causado ya algún impacto, más allá del trabajo estrictamente escolar, por lo que se consideró importante abordar esta problemática para definirla de acuerdo con las características reales que presenta en el ámbito escolar, y describirla en el proceso completo del nivel escolar de secundaria.

**Síntesis de la investigación**

**1. Descripción.**

El rendimiento escolar en Matemáticas es bajo. Por otra parte, la forma de vinculación que se establece entre los estudiantes y la materia no garantiza que más adelante los contenidos y habilidades que la escuela se propuso desarrollar, realmente puedan apoyar al egresado en una mejor comprensión de su entorno.

Esta investigación tuvo por objetivo comprender el proceso que se da entre las variables: rendimiento escolar y actitudes hacia las Matemáticas, como elementos para mejorar la interacción, en términos de su vínculo y el logro obtenido en Matemáticas por los alumnos de secundaria.

Se abordó el estudio del rendimiento escolar como evidencia del logro obtenido por los alumnos en lo explícito del ámbito escolar; y las actitudes que los alumnos expresan hacia la materia, por cuanto determinan en buena medida, la forma de contacto e interacción que se producen en el proceso de aprendizaje.

## 2. Metodología del trabajo.

El primer acercamiento al problema se produjo al analizar los porcentajes de aprobación registrados en las secundarias diurnas de la Ciudad de México durante cinco años. Matemáticas tuvo invariablemente el último lugar en estos registros. Con esta información se procedió a hacer un estudio exploratorio sobre rendimiento escolar en Matemáticas entre los alumnos del turno vespertino de una secundaria pública del D. F. , en la generación 1986-1988. Esto permitió vivenciar el problema en el ámbito donde se produce, y explorar las dimensiones que puede presentar.

En la fase documental se hizo una revisión de materiales sobre: Matemática Educativa, Psicología, Didáctica y otros campos afines. Así mismo, se consultó la información oficial que en materia educativa ilustraba al respecto. De la información obtenida se derivaron las dimensiones de las variables: en rendimiento escolar, la calificación del alumno; y en las actitudes, i) actividades escolares, ii) posibilidades personales, iii) sentimientos hacia las Matemáticas y iv) valoración del contenido matemático.

Los indicadores de la primer variable fueron las calificaciones de los alumnos, los de la segunda, fueron sus respuestas a una encuesta cuya primera parte era la escala tipo Thurstone de Dutton, y otras tres partes en las que se valoraban diferentes dimensiones de la variable.

La última parte de la investigación se concretó a partir de un estudio de caso que se realizó en la escuela con 792 alumnos de los tres grados, durante el año escolar 1988-1989. Fue un estudio longitudinal en el que se hicieron cinco tomas de datos sobre calificaciones y se aplicó una encuesta para captar las actitudes hacia las Matemáticas al principio, enmedio y al final del ciclo escolar.

## 3. Resultados.

Del análisis e interpretación de la información se obtuvo una amplia descripción del rendimiento escolar en Matemáticas durante los cuatro períodos escolares (aproximadamente bimestrales) y al final del curso. A partir de las dimensiones propuestas se presentan las actitudes hacia las Matemàticas y la forma en que se manifiestan en el transcurso de cada grado escolar. En el tratamiento que se dio a cada variable destaca una preocupación por evidenciar los cambios que se producen durante el año lectivo, a partir de las pruebas de las hipótesis que se propusieron (14 en total), y de las estadísticas descriptivas que se obtuvieron a partir de los datos. Posteriormente se comentaron algunas asociaciones que se presentaron entre las variables a lo largo de los tres cursos de Matemáticas que corresponden al nivel escolar de secundaria.

Finalmente se hizo la integración de la información acumulada en una síntesis de los aportes parciales para dar una idea de conjunto en la que, si bien se pierde un tanto la especialidad alcanzada, a cambio se obtiene un panorama global de la información para retomar la problemática general.

Los resultados obtenidos llevan a la confirmación de las hipótesis principales que se propusieron: Existe relación entre el rendimiento escolar y las actitudes hacia las Matemáticas. En la parte intermedia de cada curso hay una etapa crítica en el rendimiento escolar que coincide con los cambios de las actitudes hacia las Matemáticas. Tales cambios se dan en sentido negativo.

A continuación se resumen los aspectos que en cada variable destacan.

En el rendimiento escolar:

- El rendimiento escolar es muy bajo en Matemáticas.
- Hay un modelo alternado en el rendimiento de los alumnos. No se mantiene ni bajo, ni medio de manera constante.
- La etapa crítica se ubica a medio periodo en cada unidad de tiempo considerada.
- En el segundo curso se registra el menor rendimiento.

En actitudes hacia las Matemáticas:

- Las actitudes de los alumnos son neutrales.
- Los estudiantes manifiestan que tienen problemas serios en la ejecución de las actividades escolares de esta materia.
- Los sentimientos hacia la materia son positivos, aunque el temor al fracaso hace que los alumnos manifiesten cierta reserva.
- Hay buena valoración del contenido matemático como acervo científico.

**Referencias bibliográficas:**


- **Aberástury, A. y Knobel H.** (1987). *La adolescencia Normal.* Paidós: México.
- **Aiken, Jr.** (1976).Update on attitudes and other affective variables in learning Mathematics. *Review of educational Research, V46,N2*, USA. pp. 293- 311
- **Callahan,W.** (1971). Adolescent attitudes toward Matemathics. *Mathematics Teachers*, USA.
- **Shúkina, G.** (1968). *Los intereses cognoscitivos de los escolares*. Grijalbo: México.

# Posibles causas que afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría euclideana en el nivel medio en Panamá

*Juan M. Nole, Sergio Sánchez*
*Universidad de Panamá (CIMECNE) y Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) Panamá*

**Introducción:** De acuerdo a los resultados de la investigación sobre la noción de simetría en los Poliedros Regulares presentada en la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa (J. M. Nole y N. Galástica, 1984, pág. 213) los estudiantes de las carreras de Matemática y Química presentaban deficiencias en geometría euclideana y dificultades en el uso de la intuición geométrica en el desarrollo de algunos cursos de asignaturas de ambas carreras. Aunque esa investigación no incluía a estudiantes de la carrera de Física, inducimos que los estudiantes de esta escuela, podrían presentar iguales dificultades en la visualización que se requiere para la resolución de ciertos tipos de problemas. <u>Estas deficiencias en geometría son un reflejo de la débil formación de los estudiantes en el nivel medio, en esta área de la matemática</u>.

**Justificación.** Motivado por la investigación anterior y para darle validez a la conjetura subrayada, llevamos a cabo esta investigación dirigida a los docentes del nivel medio, con el fin de que nos proporcionaran la información que se requiere para averiguar ¿cuáles son las probables causas que afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría euclideana en el primer ciclo (nivel medio inferior) y que inciden en la falta de formación del estudiante universitario de carreras científicas, para abordar problemas visivos espaciales?

**Característica del problema:** El problema básico consiste en que la formación en geometría de los estudiantes del nivel medio es deficiente; esto se manifiesta en la carencia del uso de la intuición en las resoluciones de ciertos problemas y demostraciones de algunos teoremas en los estudiantes que ingresan a las carreras científicas de la Universidad de Panamá.

**Objetivo:** Averiguar las causas por las cuales el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría sin coordenadas es deficiente en el nivel medio.

**Metodología:** En primer lugar nos introducimos en las lecturas y discusión sobre: Los Hemisferios Cerebrales y el Aprendizaje de la Geometría.

Luego abordamos la problemática de la enseñanza de la geometría en Panamá, ya que esta en parte se caracteriza por un excesivo mecanicismo en los procesos matemáticos y no se tiende a ejercitar y cultivar la intuición en el alumno. Esta situación no favorece el desarrollo de hemisferio derecho, que es el que se encarga de las tareas visivos espaciales.

Las estrategias metodológicas aplicadas en el aula de clase, si son únicamente verbales no ayudan a la formación de constructos para el aprendizaje de nociones de la geometría plana y del espacio. Es por ello que esta investigación se dirigió no solamente a averiguar los conocimientos que tiene el docente para la enseñanza de la geometría en el primer ciclo, sino también a conocer las estrategias metodológicas que él emplea en la enseñanza de la misma.

En la etapa inicial de esta investigación hacemos una revisión de los programas oficiales de la geometría que se enseñan en el primer ciclo y la bibliografía que se recomienda

En una segunda etapa de la investigación confrontamos a los profesores de matemática del nivel medio a través de una encuesta, por su vivencia en el desarrollo de los programas de geometría en el aula de clase.

Aplicamos la encuesta o cuestionario al 28.9% (166) del total (574) de profesores de matemática que trabajaron bajo la Supervisión de la Dirección Nacional de Secundaria Académica, durante el año 1995. El total de colegios en que se aplicó el instrumento fue de 40 en 7 provincias.

**Descripcion de la encuesta:** La encuesta consta de 19 items. Este instrumento nos permite determinar entre otros aspectos los siguientes objetivos:

1. Conocer la formación y el interés del docente para la enseñanza de la geometría de primer ciclo.
2. Indagar al docente sobre las posibles causas que inciden en las dificultades del aprendizaje de la geometría.
3. Cuestionar al docente sobre su interés en mejorar su formación para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.
4. Conocer las estrategias metodológicas que utiliza el profesor para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en primer ciclo.

**Resultados:**

1. Un 28% poseen solamente la Licenciatura en Matemática y el 49,7%, el título de Profesor de Segunda Enseñanza con Especialización en Matemática (estos también son Licenciados en Matemática).
2. El 54.21%, 39.15% y el 5.42% consideran que su formación para la enseñanza de la geometría en primer ciclo es Buena, Regular y Deficiente respectivamente.
3. El 88.55% afirman que tienen bien claras las nociones de la geometría euclideana en el plano.
4. El 62.04% afirman que tienen bien claras las nociones de la geometría euclideana en el espacio.
5. El 93.97% señalaron que les gustan enseñar la geometría de primer ciclo.
6. El 71.68% señalaron que no han cubierto los contenidos de geometría, cuando han dictado la matemática de primero, segundo y tercer año.
7. El 53.01% indicaron que al enseñar la geometría de primer ciclo, siguen el orden del programa oficial.

8. El 89.15% han encontrado que los estudiantes no poseen los conocimientos previos para el aprendizaje de la geometría en el nivel que se encuentren.
9. El 53.01% señalaron que los contenidos del programa de geometría de primer ciclo se adaptan parcialmente al nivel de comprensión de los alumnos.
10. El 89.75% indicaron que la principal causa que dificulta el aprendizaje de la geometría en el primer ciclo es el tiempo insuficiente para la enseñanza de la misma.
11. El 96.98% señalaron que han utilizado el juego de geometría como recurso didáctico.
12. El 93.97% señalaron que en la enseñanza de la geometría en primer ciclo su metodología es una combinación del método expositivo con algún método activo.
13. El 83.13% consideran que una actividad eficiente para el proceso de enseñanza-apendizaje de la geometría es la asignación de problemas para ser resueltos en grupos.
14. El 72.89% señalaron que han considerado actividades que conllevan al desarrollo en el alumno de distintas formas de pensamiento.
15. El 98.19% consideran que son necesarios algunos seminarios de actualización en geometría euclideana en el plano y en el espacio, para profesores en ejercicio.
16. El 96.98% consideran que es necesario promover un seminario de actualización sobre Didáctica de la Geometría, para profesores en ejercicio.

**Conclusiones:** A pesar, de que un 77.7% de los encuestados son licenciados en matemática, solamente alrededor de un 54% consideran que su formación para la enseñanza de la geometría en primer ciclo es buena. Esto señala la poca formación en geometría euclideana del docente a nivel medio.

En general los estudiantes no poseen los conocimientos previos para que se logre el aprendizaje de la geometría en el nivel en que se encuentren.

Por lo general la principal causa que dificulta el aprendizaje de la geometría en el primer ciclo se debe a la insuficiencia del tiempo para la enseñanza de la misma.

La geometría debe dictarse como una asignatura aparte del resto de la matemática

**Referencias bibliograficas:**


- **Ministerio de Educación de la República de Panamá.** *Programas Oficiales de Matemática* en el Area de Geometría correspondiente al primero, segundo y tercer año.
- **Nole, J. y Galástica, N.** (1994). La Noción de Simetría en los Poliedros Regulares. Informe de Investigación de las *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*.
- **Verlee, L.** (1987). *Aprender con todo el cerebro*. Editorial Martínez-Roca. Barcelona.

## Ciclos de aprendizaje en la enseñanza de la matematica

*Juan M. Nole*
*Universidad de Panama (Cimecne) y*
*Secretaria Nacional de Ciencia, Tecnologia e Innovacion (Senacyt) Panama*

### Justificacion.

De acuerdo a la búsqueda de nuevas alternativas metodológicas que contribuyen al mejoramiento de proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, surge la necesidad de actualizar a los docentes del nivel medio conforme a las orientaciones didácticas que procuran que el alumno construya el conocimiento científico. Estos modelos demuestran una auténtica preocupación por el desarrollo cognitivo del que aprende y están influenciados por las teorías cognitivas de aprendizaje. Por esta razón proponemos el taller: Ciclos de Aprendizaje en la Enseñanza de la Matemática.

### Objetivo general

Diseñar experiencias de contenido matemático de manera tal que los participantes puedan construir el conocimiento.

### Objetivos especificos

1. Exponer la teoría de los ciclos de aprendizaje.
2. Desarrollar algunos ejemplos de ciclos de aprendizaje en la teoría de conjuntos.
3. Obtener resultados de la geometría euclideana plana y del álgebra escolar.

### Contenido

1. Teoría de los ciclos de aprendizaje.
2. Ejemplos sencillos de ciclos de aprendizaje en la teoría de conjunto.
3. Construcción con regla y compás del hexágono regular inscrito en una circunferencia.
4. Extensiones del Teorema de Pitágoras.
   - 4.1. Caso: de triángulo equiláteros construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.
   - 4.2. Caso: de semicircunferencias construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo.
5. Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo cualquiera.
6. Propiedad conmutativa de la multiplicación.
7. Resolución de problemas por procedimiento algebráicos.
8. Construir una fracción apartir de un decimal.
9. Cuadrado de un binomio.
10. Factor común de un polinomio.

### Metodología

Este taller está organizado para realizarse con participantes del nivel medio. En la primera sesión de trabajo se hará un exposición central por parte del expositor sobre la teoría de los ciclos de aprendizaje en el contexto de la visión constructivista. Se presentarán y discutirán ejemplos de ciclos de aprendizaje de nociones de la teoría de conjuntos que se enseñan en V° grado de primaria, tales como: la noción de proposición, intersección de conjuntos, conjuntos disjuntos y no disjuntos, etc.

En la segunda sesión el expositor trabajará con los temas 3 y 4.1 del contenido construyendo ciclos de aprendizaje. Luego se le solicita a los participantes que trabajen en cualquiera de los temas 4.2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 del contenido, construyendo ciclos de aprendizaje.

En la tercera sesión los participantes deben continuar las construcciones de los ciclos de aprendizaje propuestos para luego exponerlos.

**Observaciones de los participantes**

1. Este taller pareció excelente, porque da expectativas y nuevos recursos al maestro en la construcción del conocimiento matemático.
2. Pareció un taller muy importante, ya que nos ha servido para tomar experiencias en el campo de la docencia, donde voy a desempeñarme. El mismo permitió tomar conocimientos básicos para ponerlos en práctica en la función docente.
3. Este taller nos mostró algunos modelos y procedimientos que con toda seguridad facilitarán el trabajo con alumnos en esta área.
4. Es muy importante para una clase tener un ciclo de aprendizaje, como el que el Profesor nos muestra, porque el estudiante al introducirse en la fase de exploración se cuestionará sus conocimientos y se permitirá que reciba nuevos conocimientos, y el maestro sabrá en que nivel está el alumno.
5. El taller me gustó mucho, porque nos ayuda ver la matemática de otra manera, una nueva perspectiva de enseñanza para mejorar la calidad de los conceptos que enseñamos.
6. Este taller fue interesante en la manera que nos presentó una forma para provocar en los estudiantes un conflicto cognitivo que genera el aprendizaje. Pero el tiempo no permitió una mayor participación práctica para el logro de mejores resultados en los participantes.
7. El contenido del taller siendo básico, tienen un alto nivel de profundidad, por la necesidad de plantear la metodología constructivista. Este taller tiene contenido suficiente pero faltaría más tiempo para que los participantes desarrollen las guías de trabajo propuestas. Sin embargo la metodología empleada fue secuencial y ordenada.
8. El taller es interesante porque nos brinda una nueva estrategia para facilitar el aprendizaje en el área de la matemática.

**Referencias bibliograficas:**


- **Lawson, A. De.** (1994). Uso de los Ciclos de Aprendizaje para la Enseñanza de Destrezas de Razonamiento Científico y de Sistemas Conceptuales. *Enseñanzas de las Ciencias*

## Acciones e invariantes en la resolución de problemas mal definidos

*Noda, A.; Hernández, J. y Socas, M.M.*
*Universidad de La Laguna. Tenerife. España*

*Presentamos en este trabajo una propuesta de caracterización de problemas de encontrar bien y mal definidos y mostramos los resultados de una experiencia con alumnos universitarios, a los que se les ha enfrentado a la resolución de problemas mal definidos en diferentes contextos, con el objetivo de analizar su comportamiento en la fase de preparación. Los datos muestran las dificultades que tienen los alumnos para diferenciar los problemas mal definidos, que varían según los contextos, y cómo sus actuaciones están dirigidas, principalmente, por el objetivo del problema y por la tipología del mismo (faltan o sobran datos), encontrándose algunos comportamientos regulares (invariantes).*

### Introducción

La noción de problema se ha intentado caracterizar tanto desde las Matemáticas (Polya, 1957), la Psicología (Newell y Simon, 1972; Chi y Glaser, 1986) como desde la Educación Matemática (Schoenfeld, 1985). Igualmente, múltiples han sido los intentos por organizarlos y clasificarlos. (Simon, 1973; Butts, 1980; Charles y Lester, 1982; Frederiksen, 1984; Borasi, 1986; Pehkonen 1991, 95). Como señalan Greeno (1978) y Kilpatrick (1987) existen muchas dificultades para hacer clasificaciones precisas de los problemas ya que muchos de ellos presentan aspectos comunes en las diferentes categorías.

Nuestros trabajos sobre problemas "mal definidos", nos llevó a una caracterización "local" de los problemas de encontrar, a partir de la clasificación de Polya (1957) y la adaptación de algunos elementos utilizados en la definición de espacio problema de Newell y Simon (1972). De esta manera, como ya hemos referenciado, en Noda, Hernández y Socas, (1998), un problema de encontrar queda determinado por la terna $\langle E,O,R \rangle$, donde E es el conjunto de estados semióticos, O el conjunto de operadores y R el conjunto de soluciones, siendo $E=\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$, con $E_n \in R$, y $E_0$ el estado inicial, formado por el conjunto de los datos dados. Caracterizamos el <u>Problema de encontrar bien definido</u> (B.D.) cuando en la terna anterior: $E_0 \neq \varnothing \wedge \exists\ (E_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \wedge E_0 \subset E_i,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, ($(E_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ representa una sucesión de estados incluidos en E), y negando estas condiciones quedará caracterizado el <u>Problema de encontrar mal definido</u> (M.D.) cuando $E_0 = \quad \vee$ (No existe) $(E_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \vee E_0 \not\subset E_i,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Esto nos permite organizar los problemas de encontrar mal definidos en: Tipo I (faltan datos) cuando $E_0 = \varnothing$, Tipo II (faltan datos) cuando $E_0 \neq \varnothing \wedge$ (No existe) $(E_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$, Tipo III (sobran datos) cuando $E_0 \neq \varnothing \wedge \exists\ (E_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \wedge E_0 \not\subset E_i,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Considerando el estado inicial $E_0'$ como el estado inicial que se obtiene modificando el estado inicial $E_0$ de los problemas de encontrar bien definidos. Los problemas "mal definidos porque faltan datos" del Tipo II se caracterizan por $E_0 \not\subset E_0'$, y se construyen eliminando datos de $E_0$, distinguiendo: los que resultan de eliminar todos los datos de $E_0$ ($E_0'=\phi$), los que resultan de eliminar algunos datos de $E_0$ ($E_0' \subset E_0$ y $E_0' \neq \phi$) y los que resultan de eliminar y añadir datos, respectivamente, de $E_0$ ($E_0' \not\subset E_0$ y $E_0' \neq \phi$), pudiendo encontrarnos en este caso, con que $E_0 \cap E_0' \neq \phi$ o bien $E_0 \cap E_0' = \phi$.

Los problemas "mal definidos porque sobran datos" del Tipo III, son caracterizados, por $E_0 \subset E_0'$, cuando son construidos añadiendo datos a $E_0$, distinguiendo: los que incluyen la solución en los datos añadidos ($R-E_0'=\phi$) y los que no la incluyen ($R-E_0' \neq \phi$), y por $E_0 \not\subset E_0'$, cuando son construidos añadiendo y eliminando datos a $E_0$, estando la solución entre los datos añadidos ($R-E_0'=\phi$).

**Descripción de la experiencia.**

Nuestro objetivo es analizar el comportamiento de los resolutores frente a problemas de encontrar mal definidos en contextos diferentes: aritmético, algebraico y geométrico, tomando nuestra propuesta de caracterización como Modelo de Competencia que sirve de referencia a la ejecución de los resolutores. El objeto de este análisis es ver la existencia o no de comportamientos regulares (invariantes) en las transformaciones que realizan los resolutores en la fase de "preparación" antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento, (Bourne et al., 1979). Para ello consideramos en el análisis tres categorías bien diferenciadas:

① **Identificación del problema en términos de bien o mal definido.** **C.1.1.** Identifican al problema bien definido como tal. **C.1.2.** Identifican al problema mal definido como tal. **C.1.3.** Identifican al problema bien definido como mal definido. **C.1.4.** Identifican al problema mal definido como bien definido.

② **Análisis de las acciones que realizan: a) dirigidas por las condiciones (datos), b) dirigidas por el objetivo (pregunta),** que se concreta en los siguientes aspectos a analizar: **C.2.1.** Se fijan en el objetivo y modifican los datos para adecuarlos al objetivo y alcanzar el mismo. **C.2.2.** Se fijan en los datos y los mantienen, cambiando el objetivo de manera que este nuevo objetivo tenga relación con los datos dados. **C.2.3.** Modifican tanto los datos como el objetivo. **C.2.4.** Otras situaciones.

③ **Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema,** que se concretan en: **C.3.1.** Añaden (o añaden y eliminan) datos, cuando se enfrentan a un problema mal definido porque faltan datos. **C.3.2.** Eliminan datos cuando se enfrentan a un problema mal definido porque sobran datos. **C.3.3.** Añaden (o añaden y eliminan) datos, cuando se enfrentan a un problema mal definido porque sobran datos. **C.3.4.** Eliminan datos cuando se enfrentan a un problema mal definido porque faltan datos. **C.3.5.** Añaden (o añaden y eliminan) datos cuando interpretan un problema bien definido como mal definido porque faltan datos. **C.3.6.** Eliminan datos cuando interpretan un problema bien definido como mal definido porque sobran datos.

**Método**

**• Población**

La experiencia se realizó con 13 alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España). Estos alumnos se caracterizan por su bajo nivel en conocimientos y razonamiento matemático ya que en su mayoría proceden de un bachillerato de Letras, y además su perspectiva profesional no requiere conocimientos formales de matemáticas.

**• Instrumento**

Pasamos una colección de 20 problemas bien y mal definidos, de los cuales sólo vamos a considerar los 13 problemas mal definidos. Estos incluyen siete mal definidos del Tipo II (faltan datos) (A1, A2, B1, B2, B3, A10 y B10) y seis mal definidos del Tipo III (sobran datos) (A4, A5, A6, B4, B5 y B6), en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Fueron pasados en dos sesiones de una hora y en distintos días. La primera sesión (grupo A de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones" y la segunda sesión (grupo B de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo". Esto lo realizan los alumnos de manera individual y por escrito.

**Resultados.**

Los resultados relativos al comportamiento de los resolutores con relación a los problemas A6(T3) y A2(T2), se presentan de manera resumida en la Tabla siguiente:

| Caracterización / Problema | Competencia | Ejecución. [Categorías de comportamiento] |
|---|---|---|
| **A2:** En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral de Antonio? | MD-T2<br>$E_0 \not\subset E_0'$<br>y $E_0' \subset E_0$ | *Actúan como si fuese bien definido*<br>(7 alumnos). [C.1.4.]<br>*Actúan como si fuese mal definido*<br>(6 alumnos):<br>$E_0 \not\subset E_0'$ y $E_0' \subset E_0$ (4 alumnos). [C.1.2, C.2.1 y C.3.1]<br>Mantienen $E_0'$ y modifican R.<br>(2 alumnos). [C.1.2 y C.2.2] |
| **A6:** ¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas? | MD-T3<br>$E_0 \subset E_0'$<br>y $R\text{-}E_0' = \phi$ | *Actúan como si fuese mal definido*<br>(8 alumnos)<br>$E_0 \not\subset E_0'$ y $E_0' \subset E_0$ (5 alumnos)<br>[C.1.2, C.2.1 y C.3.3]<br>$E_0 \subset E_0'$ y $R - E_0' = \phi$ (3 alumnos) [C.1.2, C.2.1 y C.3.2]<br>*Actúan como si fuese bien definido*<br>(5 alumnos). [C.1.4] |

Queremos señalar que en esta tabla hemos mantenido con la misma denominación el estado inicial $E_0$ de la competencia y el estado inicial $E_0$ de la ejecución, que obviamente son distintos.

Comentamos, ahora, con detalle el problema A2, en relación a las categorías de análisis ①, ② y ③. Se observan los siguientes comportamientos:

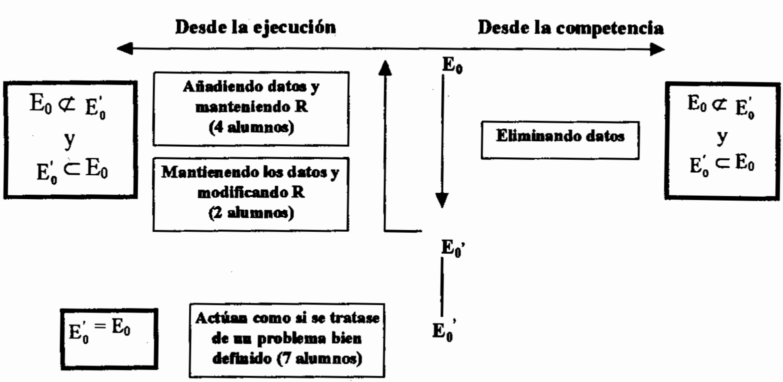
Actúan cómo si fuese un problema bien definido, de manera que no lo transforman sino que interpretan el estado $E_0$' como el estado $E_0$ y mantienen R (7 alumnos), esto es, abordan el problema operando con todos los datos para dar respuesta a lo que se pide. Algunos resolutores, ante la imposibilidad de resolverlo, comentan que no se acuerdan de cómo hacerlo (C.1.4.). Los alumnos restantes lo consideran mal definido (C.1.2.).

Comentan que el problema no puede resolverse porque le faltan datos y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo datos ($E_0$) y manteniendo el objetivo o pregunta planteada (C.2.1). En definitiva reconocen que está mal definido porque faltan datos (C.1.2.) y lo transforman en un problema bien definido modificando el $E_0$' en $E_0$, añadiendo datos (C. 3.1) y manteniendo R, quedando caracterizado por $E_0 \not\subset E_0'$ y de la clase $E_0' \subset E_0$ (4 alumnos).

Intentan resolver el problema operando con todos los datos pero se olvidan de lo que se pide y dan una solución no pedida, es decir, que sus acciones están dirigidas por las condiciones y no por el objetivo (C.2.2). En definitiva no reconocen explícitamente que está mal definido y lo transforman en un problema bien definido manteniendo el $E_0$' y modificando R (2 alumnos).

Observamos, por lo tanto, que la actuación más frecuentes en este problema es actuar como si fuese un problema bien definido interpretando el estado $E_0$' como el estado $E_0$ y manteniendo R.

El análisis global de este problema, tanto desde la competencia como desde la ejecución se refleja en el siguiente diagrama:



**Conclusiones.**

Respecto a las transformaciones que realizan los resolutores en la fase de preparación observamos que una vez que reconocen que están mal definidos, si son del Tipo II (faltan datos), la tendencia es a caracterizarlos como problemas del mismo tipo, mientras que si son del Tipo III (sobran datos) se observan diferentes comportamientos: a) caracterizarlos como problemas del mismo tipo y b) caracterizarlos como problemas del Tipo II (faltan datos).

Respecto a las tres categorías de análisis mencionadas en la descripción de la experiencia, observamos lo siguiente: Con relación a la identificación de problemas bien y mal definidos observamos asimetrías según el contexto. Es en el contexto aritmético donde se dan las actuaciones más correctas, y es en el contexto algebraico donde encontramos las actuaciones más incorrectas. Es decir, en los problemas de contexto aritmético, la casi totalidad de los alumnos observan que los problemas están mal definidos y en los problemas de contexto algebraico es donde observamos más casos de alumnos que al enfrentarse a estos problemas mal definidos, actúan como si se tratase de problemas bien definidos. Con relación a los problemas mal definidos porque faltan datos o porque sobran datos, se observa un cierto equilibrio.

Con respecto a la segunda categoría, observamos que según el contexto, el comportamiento 2.1. es el más frecuente observándose un equilibrio en los tres contextos. El comportamiento 2.2. aparece en todos los contextos siendo esta actuación más frecuente en el contexto algebraico seguido del geométrico. El comportamiento 2.3. es más frecuente en los problemas de contexto aritmético no observándose ningún caso en los problemas de contexto geométrico. Además, según se trate de un problema mal definido porque faltan o sobran datos, se observa que el comportamiento 2.2. aparece con más frecuencia e problemas mal definidos porque faltan datos. No se observaron otras situaciones (2.4.) significativas en esta experiencia.

Con respecto a la categoría tercera, observamos que la actuación 3.4., obviamente, no se da en ningún contexto. La actuación 3.3. aparece en los contextos algebraico y geométrico en igual medida, no dándose esta actuación en el contexto aritmético excepto cuando además de modificar los datos modifican el objetivo.

**Como resumen podemos señalar:**

Que el modelo de competencia local construido es de gran utilidad para caracterizar los diferentes problemas de encontrar mal definidos para el análisis de las actuaciones de los resolutores; que la diferenciación entre la explicación añadida para el grupo A y B de problemas, no influye en la actuación de los resolutores; que los problemas mal definidos presentan cierta dificultad para ser diferenciados como tales, observándose la influencia del contexto en este comportamiento. Así, es el contexto aritmético el que ofrece menor dificultad y el algebraico el que ofrece mayor dificultad, para este grupo de resolutores; que existe un predominio de las acciones dirigidas por el objetivo del problema, apareciendo actuaciones dirigidas por las condiciones principalmente en los problemas del tipo II y en mayor medida en los de contexto algebraico; y que sus actuaciones sobre las condiciones del problema están dirigidas por la tipología del problema, añadiendo o (añadiendo y eliminando) datos cuando son problemas donde faltan datos, y eliminando o añadiendo datos cuando son problemas donde sobran datos.

**Referencias bibliográficas:**


- **Baruk, S.** (1985). *L'âge du capitaine.* París: Editions du Seuil.
- **Bourne, L. E; Dominowski, R. L. y Loftus, E. F.,** (1979). *Cognitive Processes.* Prentice-Hall. New Jersey.
- **Borassi, R.,** (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies on Mathematics,* vol. 17, pp. 125-142.
- **Butts, T.,** (1980): Posing Problems Properly. En Krulik, (Ed.): *Problem Solving in School Mathematics.* pp 23-33. NCTM. Reston, Virginia.
- **Charles, R. y Lester, F.,** (1982). *Teaching problem solving. What, Why, How.* Dale Seymour. Palo Alto.
- **Chi, M. y Glaser, R.,** (1986). Capacidad de resolución de problemas. En R. J. Sternerg (Ed.). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información.* pp 303-324. Labor. Barcelona.
- **Dewey** (1933). *How We Think.* Boston: D. C. Heath.
- **Frederiksen, N.,** (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research,* 54, pp 363-407.
- **Greeno, J. G.** (1978). Natures of problem solving abilities. En W. K. Estes (comp). *Handbook of learning and cognitive processes.* Vol. 5, pp 239-270. Hillsdale, N. J. Erlbaum.
- **Kilpatrick, J.** (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems come From? En A. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Sciencie and Mathematics Educations.* L.E.A. Hillsdale, New Jersey.
- **Newel, A. y Simon, H.,** (1972). *Human Problem Solving. Prentice Hall. Englewood Cliff.*
- **Hernández, Noda y Socas,** (1998). La resolución de Problemas de Matemáticas mal definidos. *Educación Matemática.* (Pendiente de Publicar).
- **Pehkonen, E.** (1991). Problem solving in Mathematics. *ZDM,* vol. 1, pp 1-4. Karlsruhe
- **Pehkonen, E.** (1995). Using open-ended problems in mathematics. *ZDM,* vol. 2, pp. 55-57. Karlsruhe.
- **Polya, G.** (1957). *How to solve it.* Princeton University Press. New Jersey. (Traducción castellana, *Cómo plantear y resolver problemas.* México. Ed. Trillas. 1976)
- **Schoenfeld, A.,** (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press. Orlando.
- **Simon, H. A.,** (1973). *The structure of ill structured problems. Artificial Intelligence,* 4, pp 181-201.

# DECIMA CUARTA REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

# RELME -14

**Estimados Colegas**

El Comité Nacional Organizador, en representación del Departamento de Matemática de la Universidad de Panamá, se siente honrado en invitarte a participar en la "Décima Cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa" RELME14, que tendrá lugar en Nuestra Máxima Casa de Estudios en julio del 2000.

Esta Reunión ofrece un espacio a investigadores, docentes, estudiantes y público en general interesados en la problemática que plantea el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática en los diversos niveles educativos.

En el marco del año Internacional de la Matemática, esta Reunión es la oportunidad para que los latinoamericanos compartamos nuestras experiencias e investigaciones en el campo de la Matemática Educativa.

El 2000 es un año especial para los panameños porque se culminan los esfuerzos de varias generaciones por la soberanía total de nuestro territorio.

Por estas y otras razones, te esperamos en Panamá

El Comité Organizador

# Escuela de Invierno en didáctica de las Matemáticas

## Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas

**Convocan:**
Cimate - Universidad Autónoma de Chiapas
Cimate - Universidad Autónoma de Guerrero
Cimate - Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Cimate - Instituto tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

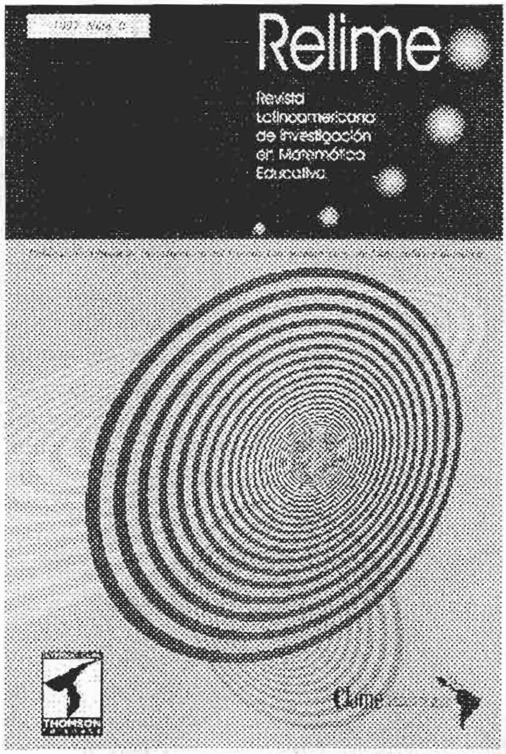
Sede: ITESM, Campus Monterrey,
Estaremos reunidos del 13 al 18 de diciembre de 1999

# Innovaciones Teóricas y Metodológicas en la Enseñanza de las Matemáticas

*Educación a distancia, aproximaciones socioculturales del conocimiento, aprendizaje cooperativo, enseñanza basada en resolución de problemas, nuevos paradigmas del aprendizaje en:*

∅ **Conferencias** ∅ **Reportes de investigación** ∅ **Mesas redondas** ∅ **Grupos de trabajo** ∅ **Cursos**

**Mayores Informes:**
Rebeca Mercado
Cimate - Centro de Investigación en Matemática Educativa y Didáctica de las Matemáticas
Aulas III, Oficina 201
Avenida Eugenio Garza Sada No. 2501, C.P. 64849, Colonia Tecnológico, Monterrey Nvo. León. MÉXICO
Tel. : (52) - 8 - 3 28 41 95 directo
(52) - 8 - 3 58 14 00 ext. 4500 y 4501
Fax: (52) - 8 - 3 59 17 71
rmercado@campus.mty.itesm.mx




***Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.***

*Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.*

Para cualquier contribución o suscripción:
Centro de Investigación en Matemáticas y Didáctica de las Ciencias – Cimate
Aulas III, Oficina 201. Avenida Eugenio Garza Sada No. 2501, C.P. 64849,
Colonia Tecnológico, Monterrey Nvo. León. MÉXICO
Tel. : (52) - 8- 3 28 4195 directo. (52) - 8 - 35814 00 ext. 4500 y 4501.
Fax: (52) - 8 - 3591771
e-mail: cimate@campus.mty.itesm.mx
http://www.cinvestav.mx/clame/