Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo
Marcela Ferrari Escolá

Marcela Ferrari Escolá
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN, México

Introducción

Nuestro trabajo parte del hecho que el conocimiento se construye respondiendo a cuestionamientos enmarcados en un paradigma específico, en una época y cultura particulares, dentro de una sociedad que le confiere pertinencia, y que su transposición didáctica es inevitable, tanto en el desarrollo y consolidación de la noción como en su adecuación a la realidad áulica. El mismo intenta evidenciar las posibles causas de la "dislexia" en el discurso matemático escolar en torno a la noción logaritmo teniendo como fin último el generar hipótesis epistemológicas robustas que nos permitan gestionar las variables pertinentes a una situación didáctica.

En nuestra investigación, denominamos "dislexia" a la ruptura que se percibe en la presentación escolar de los logaritmos, esta es, como facilitadores de operaciones en un primer acercamiento de corte numérico, y su posterior abordaje con todo el rigor de su tratamiento como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos. Así identificamos nuestra problemática en torno a la enseñanza de los logaritmos y consideramos que abordarla implica dar respuesta a preguntas tales como, ¿cómo vive esta noción en la escuela de nuestros días? ¿qué elementos permitieron su incorporación a la estructura matemática actual? ¿cómo fue su devenir en objeto a ser enseñado en nuestras aulas? ¿qué significados y sentidos se han diluido en tal proceso? ¿qué preguntas respondió en cada paradigma que los incorporó? ¿qué concepciones se encuentran respecto a ellos?.

Para desarrollar nuestro trabajo nos apoyamos en una extensión de la ingeniería didáctica como metodología de investigación ya que nuestro grupo incorpora a las dimensiones ya abarcadas por la misma, la sociocultural, reforzando así la mirada sistémica a los fenómenos didácticos abordados. Por tanto, presentamos el análisis preliminar, primera fase de toda ingeniería didáctica en el cual intentamos dar una visión del desarrollo de los logaritmos centrándonos fundamentalmente en las dimensiones didáctica, epistemológica y sociocultural del mismo, siendo esta última la que evidencia nuestro acercamiento teórico y extensión de esta metodología. Consideramos necesario, para ubicar nuestra problemática, analizar las distintas aportaciones realizadas por diferentes grupos de investigación que se desenvuelven adoptando metáforas de aprendizaje propias y reportar sus resultados tanto respecto a la apropiación por parte de los alumnos del concepto función como de su enseñanza. Destinamos por tanto, la primer parte a reflexionar sobre ellas con el propósito de captar la esencia de cada uno de los seis acercamientos escogidos y de su visión respecto a la lectura de sus resultados.

Siendo nuestra intención resignificar las nociones que son de nuestro interés, es decir, los logaritmos, nos abocamos a la búsqueda de los interrogantes y debates que éstos produjeron, de las controversias que suscitaron, de los ires y venires en su desarrollo y consolidación en la estructura matemática, en definitiva, su devenir en un saber validado social y culturalmente. Para ello, recurrimos a varios textos originales y libros de historia intentando también enmarcar al desarrollo científico en la sociedad de la época. Intentamos asimismo, reflejar el desarrollo de la comunicación y divulgación de las nociones relacionadas con los logaritmos desde su definición en el siglo XVII, hasta nuestros días presentando para ello nuestro análisis de los libros de textos que consideramos representativos aunque no únicos, y de la currícula de los sistemas educativos argentino y mexicano para conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar de distintas épocas.

En este trabajo hemos identificado tres etapas significativas en el desarrollo de los logaritmos al considerar como eje central, la relación entre ellos y las progresiones aritmética y geométrica, misma que sabemos no forma parte del discurso matemático escolar. Proponemos así mismo, una analogía entre estas etapas a las que denominamos los logaritmos como transformación, como modelizadores y como objetos teóricos, y los momentos que una situación didáctica debe contemplar, a saber, acción, formulación, validación e institucionalización. Es decir, nos apropiamos de un constructo teórico particular para reformularlo y adecuarlo a nuestras necesidades e intereses. Por último, reflexionamos en torno de los posibles diseños de situaciones didácticas que pueden sustentarse en nuestro trabajo y, por ende, en nuestra hipótesis epistemológica dejando abierto a la discusión tal tópico.

El concepto de función desde distintas perspectivas teóricas

Consideramos que la Matemática Educativa acoge en su seno, al igual que sucede en otras disciplinas, distintas escuelas de pensamiento y matices en la construcción de significados respecto a comprender, aprehender y aprender un concepto matemático. Sin embargo, considerando que el objeto de estudio de nuestra disciplina es el sistema didáctico en sí mismo, con todas las dificultades que su abordaje trae aparejado al tratarse de relaciones humanas inmersas en una cultura, sociedad y tiempos específicos y particulares en torno a un saber, el matemático, las aportaciones de cada una de ellas difiere acorde a sus referentes teóricos y culturales.

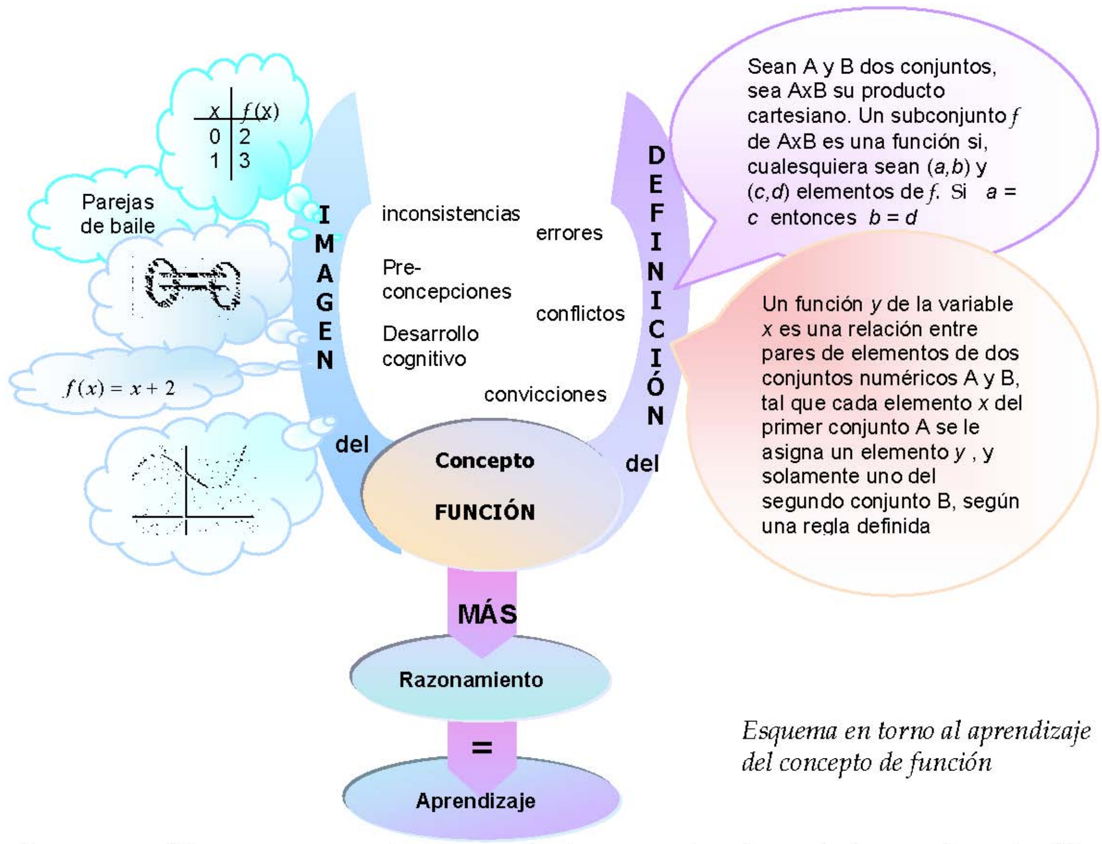
Discutimos en nuestro trabajo seis acercamientos que actualmente buscan dar explicación al intrincado proceso de aprendizaje de saberes del pensamiento matemático avanzado. En estas líneas de investigación enfocadas al estudio de la didáctica del análisis, que se sustentan en distintas "metáforas de aprendizaje", reconocemos un tronco común, la idea de que el conocimiento no es una mera copia de la realidad sino que se construye, es decir, se adhieren a la tesis piagetiana de la epistemología genética respecto al desarrollo del pensamiento (Cantoral & Farfán, 1998).

Entra en juego en ellas, además de la filosofía que se adopte para explicar el cómo se aprende, es decir, los mecanismos puestos en juego entre el sujeto epistémico y el objeto a conocer, la mayor o menor importancia que a lo social y cultural se le confiera y al análisis del devenir de una noción en saber a enseñar, ya sea esto en el transcurso de la historia y desarrollo de la cultura como dentro de la cultura particular del aula, así como también, el saber matemático a ser enseñado en sí mismo. Por tanto, no es ajena a los mismos la noción de obstáculo epistemológico establecido por Bachelard (1938) e incorporado a la matemática educativa por Brousseau (1976).

En particular nos interesa abordar la ***noción de función*** la pues la importancia que se le confiere en la Matemática de hoy, se ve reflejada en su status y presencia dentro del currículum actual, tanto en el nivel medio superior como en el superior. Es considerada fundamental y central en Cálculo y en otras ramas de la Matemática, así como también esencial en diversas áreas de la ciencia. Las dificultades detectadas en los alumnos para apropiarse y comprender el concepto ***función*** de han motivado diversas investigaciones.

El lenguaje y las inquietudes de los acercamientos analizados, a saber, imagen y definición del concepto de Tall y Vinner, la teoría APOE de Dubinsky, la dialéctica herramienta-objeto y juegos de contextos de Douady, la articulación de registros de Duval, los obstáculos epistemológico y actos de entendimiento de Sierpinska y pensamiento y leguaje variacional de Cantoral y Farfán al cual adherimos, con diferentes matices y acentos, giran en torno de comprender y dar respuesta, con una visión científica, a la problemática surgida de la enseñanza y aprendizaje de saberes matemáticos, cuya estructura lógico formal y la diversidad de sus contextos y lenguajes, así como también las variadas concepciones lo convierten en una compleja tarea.

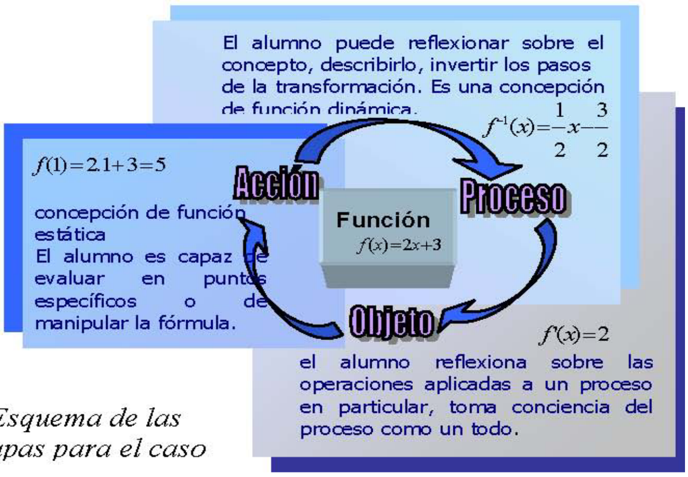
En estos acercamientos encontramos coincidencias en cuanto a que aprender implica apropiarse de nuevas nociones incorporándolas a las que ya se poseen, fuente esto de múltiples conflictos cognitivos. Al respecto, para Tall y Vinner (1981) es motivo de inconsistencias y no adecuaciones entre las imágenes y la definición del concepto, sin



Esquema en torno al aprendizaje del concepto de función

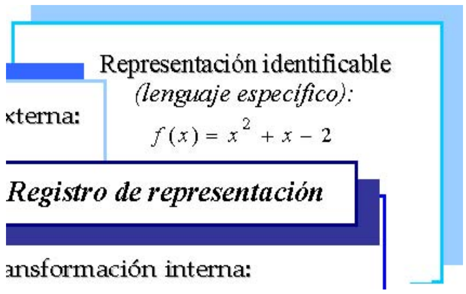
embargo consideramos que este acercamiento se centra demasiado en el contenido y en documentar experiencias educativas y cuya epistemología se basa en la construcción del conocimiento en el aula, esto es, la visión de un sujeto que aprende ante un objeto a ser enseñado. Consideramos que para estos investigadores aprender es sinónimo de superar inconsistencias y conflictos producidos por la distancia entre las imágenes del concepto construidas como respuesta a estímulos de distintas naturaleza y las definiciones formales y estructura lógica presentes tanto en la matemática erudita como en la escolar. Resultados reportados en sus investigaciones, respecto al aprendizaje del concepto de función dan cuenta que la concepción de esta noción se organiza, por lo general, alrededor de prototipos comunes encontrados, de la asociación entre ***función y fórmula*** o entre ***función y curva regular***, y no en torno a su definición (Vinner, 1992; Tall, 1992; Eisenberg, 1983; 1992).

Por otra parte Dubinsky, en su teoría APOE, tampoco utiliza, como fuente de información y entendimiento de ciertos obstáculos o dificultades persistentes en los alumnos, aspectos socio-epistemológicos, es decir le confiere poca importancia a los individuos, a las herramientas y al contexto sociocultural en el cual se lleva a cabo la actividad humana, considerando que el individuo aprende en la medida que es capaz de construir procesos y objetos, siendo por tanto central en este acercamiento la adquisición de "esquemas". Resultados reportados por Dubinsky (1992) van en el sentido de que existen dificultades en el pasaje de la función vista como proceso y la función vista como objeto, siendo el tiempo y la motivación factores importantes para lograr este pasaje.

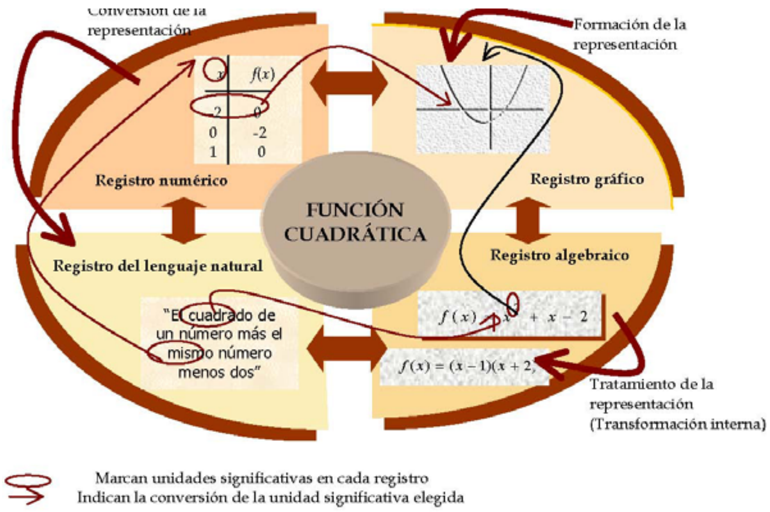


Esquema de las etapas para el caso

Duval (1999), en cambio, centra su atención en que se aprende en la medida que se abstrae el objeto de sus representaciones, proceso en el cual adquirir representaciones semióticas y un pasaje fluido entre ellas se torna una actividad importante. Investigaciones que utilizan este acercamiento dan cuenta de que existen no sólo dificultades para articular los diferentes registros simbólicos y las representaciones en cada uno de ellos de la noción de función, sino también en la conversión de un registro a otro y en el trabajo dentro de un mismo registro. Las investigaciones señalan a los hábitos de enseñanza tradicional como causas de las dificultades congnitivas mencionadas, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico y el status infra-matemático asignado al registro gráfico impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de uno a otro (Artigue, 1995).



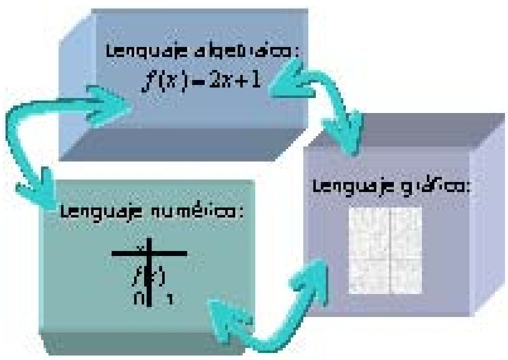
La utilización de calculadoras graficadoras o de computadoras personales en la enseñanza, debido a que permiten al alumno acceder a distintos registros de representación por medio de ventanas múltiples, ha alentado la realización de investigaciones orientadas al estudio de las dificultades y las posibilidades que realmente ofrecen estas herramientas.



Esquema de la articulación de registros semióticos para el caso de función cuadrática

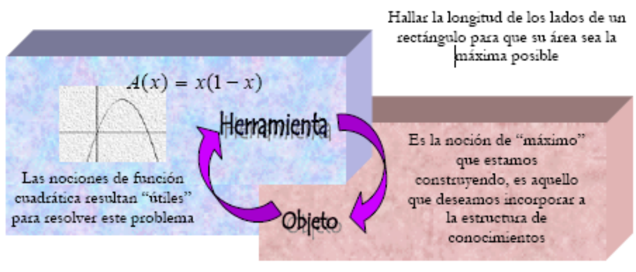
Algunas evidencias sugieren que el uso de calculadoras graficadoras ayuda a desarrollar una comprensión más global del concepto de función pues permite visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y las funciones correspondientes. A su vez, los registros gráfico y numérico adquieren un nuevo status, pues los alumnos comprenden que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica (Mirón, 2000).

Por su parte Douady (1986; 1995; 1996) habla de objetos, en un sentido sutilmente distinto al de Dubinsky, y de herramientas como los posibles status que pueden tener las nociones en un individuo. Al igual que Duval, considera importante el pasaje dinámico entre contextos, lo que denomina "juego de contextos", siendo a la vez fundamental el proceso dialéctico entre los objetos y las herramientas en la construcción de significados.

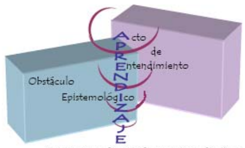


La dialéctica herramienta-objeto es un proceso cíclico que organiza los papeles del profesor y del alumno, en el transcurso del cual los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de "herramienta" para resolver el problema y de "objeto" al tomar un lugar en la construcción de un conocimiento organizado.

Los resultados de diversas investigaciones en este marco, alrededor del concepto de función, dan cuenta de la existencia de dificultades para considerar a las funciones como herramientas en el trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al contexto de funciones aquellos problemas



Esquema herramienta – objeto para el caso de función que han sido planteados en otros contextos matemáticos tales como el numérico, el geométrico, o externos a la matemática y que requieren de tal traducción para ser resueltos.



Esquema obstáculo epistemológico acto de entendimiento

Por su parte, Sierpinska (1992) habla de distintas categorías de obstáculos epistemológicos construyendo desde ellos su percepción de lo que significa aprender, esto es, mediante la superación de los mismos en lo que ha dado en llamar "actos de entendimiento", produciéndose esta dinámica de forma espiralada lo cual la aleja de la didáctica tradicional que considera que el alumno aprende de manera llana y lineal, en la medida que el docente le evita dificultades y obstáculos, facilitándole así el aprendizaje.

Bajo esta perspectiva del significado de aprender y comprender conceptos, y enfocándonos particularmente en el de función, adquiere relevancia el conocimiento y explicitación de las distintas concepciones que sobre función se encuentran en los actores del sistema educativo, así como también detectar dificultades propias de su desarrollo y devenir en un objeto a ser enseñado.
Por otra parte, para Sierpinska, los actos de entendimiento más relevantes para el concepto de función consisten en la identificación de cambios observados a nuestro alrededor como un problema práctico a resolver, así como también, el reconocimiento de regularidades en las relaciones entre cambios como una manera de estudiarlos. Ignorarlos como condiciones necesarias para el desarrollo de la noción de función, conllevaría enfrentar un obstáculo epistemológico, relativo a la filosofía de la matemática, respecto a considerar que los problemas prácticos no conciernen a esta disciplina. Esto desconocería lo sucedido en la historia, pues las funciones aparecieron como herramientas para predecir y describir fenómenos de la naturaleza. Además, establece que la definición es una descripción del objeto conocido a través de los sentidos. La definición no determina al objeto, sino el objeto a la definición. Superar este obstáculo requeriría la capacidad de discriminar entre una definición matemática y la descripción del objeto, es decir, hacer una síntesis de la concepción general de función como objeto (Sierpinska, 1992).

Nos adherimos entonces al acercamiento socioepistemológico, en el cual consideramos se atienden todos los aspectos inherentes al conocimiento matemático y al sujeto que aprende. Es decir, incluye y estudia los diferentes planos de lo cognitivo desde la perspectiva de la psicología social, trabajando las ideas de Piaget, Vygostky, Bruner, entre otros, en tanto se considera que el conocimiento matemático se construye interactuando con una realidad. Atiende el plano de lo didáctico, encontrando sus fuentes en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y en la Transposición Didáctica de Chevallard, estudiando a su vez el discurso matemático escolar y teniendo como fin último el impactar en el sistema educativo, estableciendo nexos y puentes entre la investigación y la realidad áulica. No pierde de vista que la matemática es un constructo sociocultural y las prácticas de referencia que le dan origen y vida a esta disciplina, así como también incorpora con mayor énfasis la componente epistemológica en sus investigaciones, como una herramienta indispensable para la comprensión de los sucesos áulicos y como una fuente de información respecto a las dificultades y modos de superación producidos en el desarrollo de las nociones y conceptos matemáticos, así como también de significados que, por los procesos de comunicación se diluyen o pierden en el tiempo.

Esquema de pensamiento y lenguaje variacional

Todo esto desde una perspectiva y análisis sistémico que le confiere una visión global del sistema didáctico, considerando a éste integrado por docente, alumno y saberes validados para ser enseñados, que confluyen en una realidad particular inmersos en una cultura y tiempos específicos, lo que confiere matices a las relaciones establecidas entre los mismos.

En general sus trabajos no se enfocan en una noción matemática en particular, sino en una visión mas global del proceso que la tiene como integrante. Son varios los trabajos desarrollados por este grupo que nos aportan interesantes resultados, pudiéndose puntualizar varios de los que, a lo largo de más de diez años de existencia, este grupo ha producido en torno a la noción de función.

- ✓ El concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. Su desarrollo se ha producido prácticamente a la par del humano ya que se encuentra presente en las correspondencias entre cantidades trabajadas en la antigüedad hasta los debates actuales, tanto en el ámbito de la comunidad de matemáticos como en su incorporación y presencia en la currícula actual (Cantoral & Farfán, 1998).

- ✓ Su complejidad se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que tratan los estudiantes y profesores (Farfán, 1992; Ceballos, 1996).

- ✓ La enseñanza sobrevalora los aspectos formales y algorítmicos ambos, en general, desprovistos de significados para el estudiante, lo cual redunda en la construcción de un universo restringido de formas gráficas y expresiones analíticas en la cultura áulica y por tanto en los saberes de los estudiantes y profesores. Se dejan de lado, por tanto, las argumentaciones visuales y los enfoques numéricos, entre otras causas por no ser considerados como procedimientos matemáticamente válidos. Además, la apropiación del conocimiento no se lleva a cabo, en general, a partir de la definición conceptual sino desde una severa acción algorítmica propiciada por los docentes en el salón de clases, considerándose que esta algoritmia se refleja como un obstáculo en la apropiación de conocimiento en los estudiantes. (Quiróz, 1989; Farfán, 1992; Ceballos, 1996)

- ✓ Se requiere una concepción de función en tanto objeto que permita que otro procedimiento actúe a su vez sobre él, añadiéndosele un manejo eficiente de formas gráficas extenso y rico en significados.

- ✓ Impera la concepción de función en tanto proceso por sobre la de objeto. Aparece entonces el interrogante: ¿Qué significa operar un proceso? Esto constituye un verdadero obstáculo para la apropiación de significados de nociones más complejas del pensamiento matemático avanzado, tal como derivadas, integrales, etc. para cuya construcción se requiere realizar acciones sobre funciones, por lo que su status de objeto debe estar consolidado en el estudiante (Cantoral & Farfán, 1998).

Se perciben en estos resultados la visión sistémica que desarrolla este paradigma pues en los puntos considerados observamos la presencia de aspectos socio-culturales, cognitivos, didácticos y epistemológicos aunados para dotar de significado a las dificultades y distintos acercamientos respecto a la noción de función.

En resumen, nuestro trabajo se enmarca y cobra sentido dentro de la aproximación socioepistemológica, que para Farfán, es un marco para la investigación y el desarrollo del currículum que se apoya en la teoría de situaciones, profundiza el análisis del saber incorporando en su análisis no sólo el origen conceptual o procedimental, sino su origen social. Una cierta razón de ser que es factible descubrir si se examinan las prácticas de referencia y las formas de su aproximación en una cultura[1]

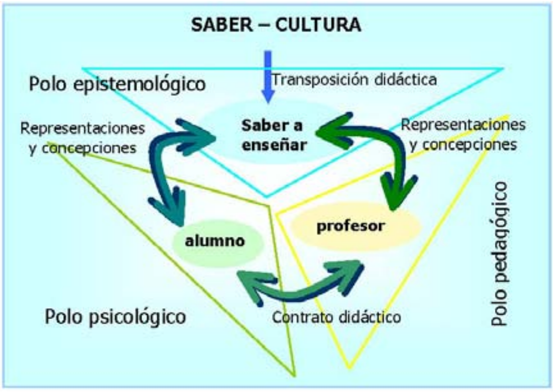
Marco Teórico

Adherimos entonces al acercamiento socioepistemológico como paradigma y marco para nuestro trabajo y utilizamos la ingeniería didáctica como metodología de investigación. En este trabajo, nos interesa establecer consistentemente las pautas para un posterior diseño de situación didáctica en torno a la "dislexia" en el aprendizaje de la noción de función logaritmo producto de la no construcción de dicho concepto en el ámbito escolar. En otras palabras nos estamos refiriendo a la ausencia de significado que la función logaritmo presenta en los alumnos, debido al salto que se percibe entre su introducción a la enseñanza como una potente herramienta facilitadora de operaciones en un acercamiento netamente aritmético y su posterior aparición en la enseñanza superior como una función definida mediante la integración de la hipérbola equilátera.

Según Douady (1995), una ingeniería didáctica es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un "profesor-ingeniero", para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico. Por tanto, considera que la ingeniería didáctica es, por un lado, un "producto" que resulta de un análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis a priori en el cual se decide sobre qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará, y por otro lado, un "proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de la clase lo exija. Nuestro grupo incorpora una cuarta componente, la socio-cultural, en su búsqueda de un acercamiento sistémico a la construcción de conocimientos, adoptando una visión socioepistemológica que las atraviesa y aúna.

Como ya expresáramos, dos son las teorías que dan sustento teórico a la ingeniería didáctica, a saber, la teoría de transposición didáctica de Chevallard, y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Estas teorías surgen en una necesidad de crear acercamientos teóricos menos simplistas que los proporcionados por otras disciplinas como la pedagogía, la psicología, la sociología, la matemática misma, integrando los aportes de todas ellas en un esfuerzo por crear explicaciones propias y por tanto generar una disciplina que atienda la problemática particular que produce el tratamiento de entes matemáticos en un ambiente áulico y los fenómenos inherentes a esta actividad.

[1] 1 Conferencia dada en la Escuela de Medicina, México, Mayo-2000.



Surge entonces, la "didáctica de la matemática" como una disciplina científica, cuyo objeto de estudio son los fenómenos ligados a la enseñanza de objetos matemáticos vistos, en nuestro acercamiento, como productos culturales. La idea última que guía este constructo es la de "intervenir" de manera racional en el sistema educativo, controlando a priori el proceso y las variables puestas en juego, es decir, conjeturando con sustento los efectos esperados y siendo dúctiles para efectuar los cambios que sean pertinentes en tal procedimiento.

Por tanto, el objetivo de la didáctica de la matemática es explicar los fenómenos didácticos debiendo para ello estudiar y entender la naturaleza de los sucesos acaecidos en el salón de clases en torno a los saberes de nuestra disciplina. Se constituye así, como fundamental, el estudio de los saberes puestos en juego y las restricciones bajo las cuales esto tiene lugar.

Brousseau nos habla de una "génesis ficticia" de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo y utilización. Considera a su vez, la necesidad de retornar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes, esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios y su evolución y uso en nuevos problemas. No deseamos decir con esto que se incorpore el desarrollo histórico de los conocimientos al salón de clase, sino que los saberes adquieran nuevos significados o recuperen sus significantes iniciales, desde esta visión en la cual se los adopta como entes socioculturales.

Según Chevallard (1995), el conocimiento generado por la élite de matemáticos, no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que ha denominado transposición didáctica. Siguiendo sus ideas, el "saber erudito" pasa a ser un "saber a enseñar", luego de ser validado por una "nooesfera" que le confiere el status de conocimiento a ser abordado en la escuela. No se trata de una elementarización burda del conocimiento, ni de una mera simplificación del mismo, sino por el contrario, el producto de los ajustes didácticos que lo hace diferir del conocimiento de origen.

Entendemos entonces que la transposición didáctica no es caprichosa ni voluntaria, sino producto de las restricciones que la sociedad impone a las prácticas educativas (Cantoral, 1995). La primera etapa de este proceso se produce cuando el científico pone a consideración de sus pares los resultados obtenidos en su investigación. Esto le exige hacerlo público, es decir, quitarle su sello personal, transformarlo en un saber a ser "comunicado", para lo cual debe dejarlo libre de los resabios de su creación, es decir, de sus errores, de sus caminos truncados, de sus retrocesos, para volverlo un saber cultural, por tanto, despersonalizado, descontextualizado y atemporal, esto es, que pueda vivir en cualquier momento. Aparece así, lo que Chevallard ha dado en llamar el "saber sabio o erudito". Luego, cuando este saber público entra en la escuela a través del profesor, comienza un proceso de re-personalización, re-contextualización y temporalidad de los conocimientos, es decir, se le debe dotar de intencionalidad, de una nueva naturaleza, de otro sentido y escenario en el cual ser entendido, interpretado y validado por los estudiantes. Cabe luego el esfuerzo de los alumnos para redespersonalizar, redescontextualizar y reatemporalizar los conocimientos adquiridos para

ser capaces de utilizarlos en otras circunstancias, viéndolos como saberes culturales de su época.
Bajo estas consideraciones, la ingeniería didáctica se constituye en un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje en situación escolar. Como metodología de investigación, se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y también por que se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).
Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ingeniería didáctica, a saber: análisis preliminar; diseño de la situación didáctica y su análisis a priori; experimentación; análisis a posteriori y validación. Nuestro trabajo se centra en el análisis preliminar, precisando las hipótesis epistemológicas necesarias para el diseño de una situación, al que desarrollaremos en la siguiente sección.

Otros antecedentes sobre la función logaritmo.

Nuestra preocupación en torno a los logaritmos cobra sentido al observar el tratamiento escolar dado a los mismos. Confrey (1996) y Lezama (1999) identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas sin mayor detenimiento en ello. Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, observación que consideramos muy vinculada con la problemática tratada en este trabajo pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que a nuestro entender no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Por otro lado, de la exploración que realizara Trujillo (1995) respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y las nociones de los logaritmos y exponenciales como funciones, surge la absoluta deficiencia de los entrevistados, estudiantes recién egresados del nivel medio superior, para intuir tal cosa. Si bien todos reconocen las progresiones aritmética y geométrica y logran determinar el patrón de comportamiento de cada una de ellas, ninguno consigue establecer una relación entre ambas. Las respuestas reportadas giran en torno a que: ambas forman parte de los números reales; o ambas son progresiones; o no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica. Se observa además, que esta falta de vinculación entre las progresiones les inhibe generar argumentos en el contexto gráfico, lo cual confirma que ven a ambos objetos como entes aislados y por tanto, no dan indicios de un pensamiento funcional respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

Por otro lado, se encontraron las mismas dificultades en los profesores de nivel medio superior entrevistados, sólo uno de tres reconoció las funciones logaritmo y exponencial como la relación entre las progresiones propuestas, distinguiendo explícitamente la base y graficando ambas funciones, aunque de manera convencional, es decir, recordando la forma de las curvas exponencial y logarítmica sin construirlas desde las progresiones dadas.
Las dificultades propias del abordaje de este tema se suman a las ya reportadas en el parágrafo anterior, respecto a la apropiación del concepto de función. Entre otras, mencionamos la importancia que escolarmente se le confiere al registro algebraico en detrimento de otros,

como por ejemplo el gráfico o el numérico, lo cual repercute en un empobrecimiento de las herramientas utilizables a la hora de apropiarse de un nuevo concepto o enriquecer uno ya conocido.

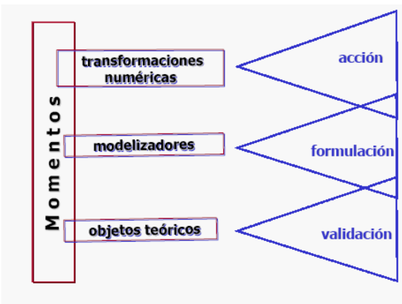
Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto, contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos. A éstos, se los presenta como el número al que se debe elevar la base para obtener cierto número, relacionándose luego con la función exponencial, mediante la inversa y con su definición dada en términos de una integral indefinida.

No cabe duda respecto a la importancia que la noción de logaritmos ha poseído desde su origen hasta nuestros días; su evolución, su adaptabilidad a los distintos paradigmas científicos que han ido entrecruzándose, reemplazándose, superándose, ha permitido que arribe a nuestros días intacta, contando con un rincón propio en la estructura matemática actual. Sin embargo, la complejidad de su definición, de las nociones que involucra, hacen pertinente explorar su evolución, recabar información respecto a los significados que se han perdido en el transcurso de la historia, en un intento de proporcionar elementos para introducirla y desarrollarla en el aula de forma más accesible para los alumnos y profesores, los cuales se encuentran por lo general ante una noción con la que pueden operar, trabajar algorítmicamente, a la que luego someten a derivación, integración, entre otras operaciones matemáticas, sin haberla construido en su vida escolar.

Nuestro análisis preliminar enfocado a las dimensiones epistemológica y didáctica

En este trabajo partimos de la premisa que la matemática es una construcción humana, un producto social y cultural, consideramos que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias. En estas ideas, las cuales surgen de pensar como aplicables al aprendizaje de la humanidad las situaciones de aprendizaje desarrolladas por Brousseau en su teoría de las situaciones didácticas, es que analizamos los datos recogidos en nuestra indagación epistemológica.

Efectivamente, si tomamos como eje central en el desarrollo de los logaritmos, las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, que sustentaron su definición como objeto matemático facilitador de operaciones en el siglo XVII, podemos distinguir tres grandes momentos en el devenir histórico de los logaritmos. Podemos observar así, un primer momento de los logaritmos como transformación, definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido aun formalmente definidos, pues estamos refiriéndonos a siglos anteriores al XVII, se explora esta relación en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones. Es un momento de exploración de posibilidades, de uso de lo que ya se conoce y de enfrentamiento con las limitaciones propias de las herramientas matemáticas puestas en juego, es por tanto una etapa de acción si nos valemos de la analogía propuesta.



Deviene luego un momento de definición de la noción, de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental. Así, se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, esto es, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual, como veremos, no fue producto de la tabulación de sus valores. Se encuentra su cuadratura superando las deficiencias del patrón hallado para la cuadratura de las funciones potencia cuando se trata del exponente –1. Se los utiliza para describir fenómenos de la naturaleza como la caída de cuerpos en medios resistentes o la propagación de las ondas sonoras. Se logra su desarrollo en serie de potencias lo que posteriormente le conferirá el status de función. Así, distinguimos a esta etapa como aquella de los logaritmos como modelizadores en la cual se los identifica en cada lenguaje utilizado, se los caracteriza en los distintos contextos conocidos y se establecen las relaciones entre ellos.
Por último, consideramos que con los esfuerzos por incorporarlos a la estructura teórica siguiendo ideas de rigor y purismo matemático, de descontextualización y abstracción, se los escinde de sus orígenes convirtiendo a los logaritmos en un objeto teórico. Se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro. Se los incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar.

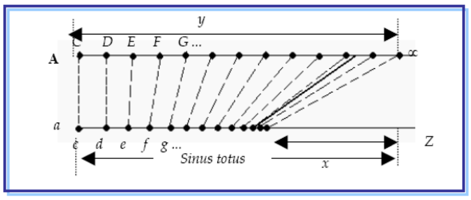
Entran en juego entonces, en esta visión sociocultural de la matemática a la que adherimos, variables sociales y culturales, las que deberán fungir como cristales para comprender los avances y retrocesos, los obstáculos y las maneras de superarlos, las argumentaciones y los consensos en este aprendizaje de la humanidad, particularmente en el desarrollo de los logaritmos.

De nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: de exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, de analiticidad, de simbolización, de formalismo a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos ya mencionados. Así, consideramos como primer momento a los logaritmos como transformación, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda por facilitar engorrosos cálculos producto de necesidades sociales de la época. En este sentido, agrupamos en este momento a las etapas de exploración algorítmica y numérica utilitaria. En la primera, comienza a definirse la relación entre progresiones aritméticas y geométricas, encontrándose vestigios de tal relación con Arquímedes (287-212 A.C.) para ser trabajada con mayor rigor por Chuquet y Stifel en el siglo XV. Cobra importancia así, en pleno siglo XVI la idea de transformar operaciones para facilitar cálculos, es decir, transformar productos en sumas, utilizándose la relación llamada "prosthapheresis" ($2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$). Así mismo, prolifera la construcción de tablas como medios de registrar resultados de operaciones para ahorrar tiempo de cálculo (raíces cuadradas, relaciones trigonométricas, etc).

En la siguiente etapa, la ***numérico utilitaria***, entran en escena Napier y Burgüi, quienes definen por primera vez a los logaritmos. Efectivamente, Napier publica sus Mirifici Logarithmorun Cannonis Descriptio (1614) y Mirifici Logarithmorun Cannonis Constructio (1619) en los cuales presenta su tabla de logaritmos y enseña cómo calcularlos y utilizarlos. Los define como:

El logaritmo de un seno dado es aquel número que se incrementa aritméticamente con velocidad constante e igual a aquella con la cual el radio empieza a decrecer geométricamente, en el mismo tiempo que el radio decrece hacia el seno dado. (Cantoral et al, 1983)

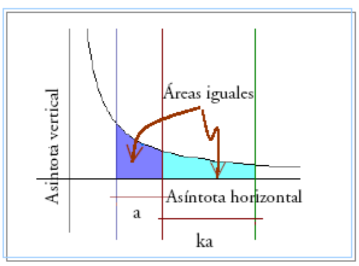
Utilizando, para hacer continua su tabla, conceptos geométricos-mecánicos y relaciones entre las progresiones aritmética y geométrica. Efectivamente construye para ello un modelo mecánico en el cual considera dos puntos moviéndose en líneas paralelas, uno a velocidad constante (descrito por una progresión aritmética) y el otro, cuya velocidad decrece a una razón constante (descrito por una progresión geométrica). Gráficamente podríamos representar este modelo de la siguiente manera:



Y si denominamos υ, al sinus totus que Napier define como 10^{7}, podemos expresar la relación entre las series geométrica y aritmética, en notación moderna, como:

$$\begin{array}{lllllll} \text{senos:} & \upsilon, & \upsilon(1-\frac{1}{\upsilon}), & \upsilon(1-\frac{1}{\upsilon})^2, & \ldots, & \upsilon(1-\frac{1}{\upsilon})^n & \ldots \\ \text{logaritmos:} & 0, & 1, & 2, & \ldots, & n & \ldots \end{array}$$

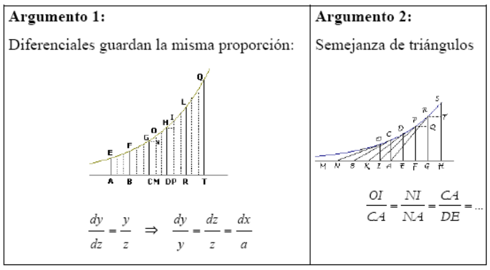
Ni Napier ni Burgüi establecen relación con exponenciales, por tanto no podemos considerar que la idea de base estuviera formulada en esta primera definición. Comienza luego la etapa gráfico-geométrica en la cual se incrementa el interés en determinar gráficas y áreas bajo curvas (cuadraturas). Aparecen así, la curva logarítmica, la espiral logarítmica, la hipérbola, etc. en plena consolidación de la geometría analítica propuesta por Descartes y Fermat. Este último, logra fórmulas generales para la cuadratura de parábolas e hipérbolas, excepto para la hipérbola equilátera, lo cual da pie a múltiples exploraciones al respecto siendo la más relevante la realizada por Gregory St. Vincent (1647) quien logra establecer que:



"si las paralelas de una asíntota son trazadas entre la hipérbola y la otra asíntota, de tal forma que las áreas sucesivas de los cuadriláteros mixtilíneos así formados sean iguales, entonces las longitudes de tales paralelas forman una progresión geométrica".

Sin embargo, no percibe la relación logarítmica en este resultado, siendo su alumno Sarrasa quien la determina.

Torricelli por su parte, analiza exhaustivamente propiedades de la gráficas de las curvas logarítmicas, distingue asíntotas y determina que la subtangente es constante. Al igual que Agnesi, acorde con las ideas imperantes en la época, no hace una distinción explícita entre las funciones exponencial y logarítmica. En su libro Institución analitiche ad uso della giuventú italiana (1748), Agnesi presenta la "curva logarítmica" como aquella en la cual las abscisas se hallan en progresión aritmética en tanto que las ordenadas responden a una progresión geométrica, dando dos argumentos geométricos para construir la gráfica:



Las ideas de continuidad, de infinito, de asociación de áreas con segmentos, y de cálculo de áreas, entre otras, nos llevan a considerar como siguiente etapa, la del desarrollo en serie de potencias. En efecto, la relación entre la cuadratura de la hipérbola y los logaritmos, mediante la identificación de propiedades inherentes a estos últimos, en cuanto a la percepción de que, formando con las abscisas una progresión geométrica, las áreas bajo una hipérbola, determinadas por las ordenadas correspondientes, son iguales pone en evidencia la correspondencia con un sistema logarítmico. Estas ideas se extienden y se logra asociar un número con su logaritmo, esto es, se hace explícita la funcionalidad del logaritmo.

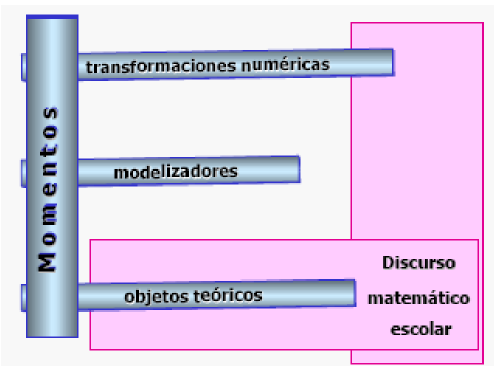
Hablamos entonces de una etapa de analiticidad pues se logra su formulación en serie de potencias lo cual lo hace susceptible al análisis. Comienza a gestarse y evidenciarse su status de función dentro del aparato matemático del siglo XVII. Aquí son fundamentales los aportes de Mengoli (1626-1685) quien se aparta de la definición tradicional de Napier y de las ideas geométricas imperantes en su época, estableciendo que a partir de la suma de fracciones se pueden construir números que cumplan con las propiedades logarítmicas. En tanto que Mercator y Newton desarrollan la función logaritmo en series de potencias.

Con Euler quizás se inaugura una nueva etapa, en la cual se vincula claramente a los logaritmos con la función exponencial, pese a que encontramos estas ideas en las exploraciones de Leibniz y Bernoulli acerca de exponenciales. Se los instituye como funciones inversas una de la otra y se los relaciona con el modelaje de fenómenos de la naturaleza. Ambas funciones se erigen como fundamentales en el desarrollo de nuevos entes matemáticos, como las ecuaciones diferenciales, las funciones multivaluadas, las exploraciones de números complejos, entre otras. Podríamos considerar a esta etapa como de simbolización en la cual se estabiliza el aparato algorítmico-simbólico que permite trabajar de manera analítica, es decir, racional y científica, gran variedad de problemas, la mayoría de ellos vinculados con la física y la economía. Es una etapa en la cual se construyen maneras más económicas de calcular los logaritmos y de construir las tablas, donde se las incorpora al campo legítimo de las funciones analíticas, es decir, de aquellas que son plausibles de expresarse con series de potencias. Adquiere entonces cierto status dentro de una teoría, es aceptado por la comunidad erudita, se justifica su existencia, se los valida socialmente.

Consideramos entonces, que la mayoría de las exploraciones del siglo XVII, quizás el más prolífico en ideas y formulaciones en torno a las funciones logaritmo y exponencial, giran alrededor de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, en tanto que la fuerza de la misma para conjeturar y determinar relaciones de tipo logarítmico pierde vigencia en siglos posteriores, opacada por otras ideas más acordes al regreso a la rigurosidad y purismo matemático que logra su esplendor en el siglo XIX con Cauchy habiendo comenzado en el siglo XVIII con Euler y su búsqueda de algebrizar los conceptos y de determinar la analiticidad de los entes que se estaban desarrollando y utilizando. Se escinde así definitivamente a los logaritmos de su origen como relaciones entre estas progresiones, se prioriza su definición formal bajo dos aspectos, uno algebraico que relaciona la potencia de un número con su logaritmo, y aquel que los presenta como la función inversa de la exponencial, los cuales se mantienen hasta hoy en el discurso escolar provocándole una falta de sentido y significación a esta poderosa herramienta del Cálculo.

Ingresamos por último en una etapa de rigurosidad, ***de formalismo***, en la cual se los instituye como la antiderivada del recíproco de una función, así como también como aquella función tal que $f(xy)= f(x)+ f(y)$, es decir, se los define desde un enfoque analítico y estructural. Es una época en la que se los escinde de sus orígenes aritméticos, de las necesidades a las que dieron respuesta. Se los incorpora de manera definitiva a la estructura matemática, aunque quizás en algunos momentos opacados por las exponenciales, las cuales juegan un papel relevante en la descripción de variados problemas vinculados con la realidad, así como también dentro del abstracto aparato matemático para darle coherencia. Distinguimos a este período como aquel en el que los logaritmos se incorporan definitivamente en el aparato matemático, volviéndose un objeto formalmente definido con un espacio propio en la teoría matemática.

Hemos dado así, un recorrido por el desarrollo de la noción logaritmo, estableciendo distintas categorías valiéndonos de una reformulación de las ideas que Brousseau estableciera en su teoría de las situaciones didácticas, mediante una analogía que resulta interesante para observar los hechos desde una óptica, que si bien fue desarrollada para explicar los fenómenos que acontecen en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de la educación primaria, consideramos adaptable para explicar los eventos culturales, es decir, al aprendizaje de la humanidad.



Por otro lado, de nuestro rastreo de las nociones vinculadas a los logaritmos inferimos que a medida que se avanza en el sistema educativo, las nociones van adquiriendo mayor complejidad, relacionándose y respondiendo a la programabilidad de los saberes establecida por Chevallard (1995), es decir, siguen una ordenación lineal y secuenciada. En una primera instancia los logaritmos aparecen en la currícula del bachillerato enfocados a problemas aritméticos sin dar cuenta de los elementos que permiten la construcción de la función logaritmo, esto luego de haber sido trabajadas, en forma paulatina, nociones que pueden ser utilizadas para tal fin. Por otro lado, en cursos más avanzados, se le necesita como una función de la cual sólo se conoce su gráfica y no se repara en su construcción, por tanto, los alumnos logran derivar sin conocer dicha función y aunque deriven muchas veces y varias funciones logarítmicas, el concepto de esta función no permanece ni se construye.

La noción de logaritmo aparece escindida de su significado original, de las controversias y consensos que suscitó. Pareciera ser sólo una notación oscura carente de sentido, que permite a los alumnos realizar cálculos y operar sin tener conciencia ni significación sobre lo que se está haciendo. A su vez, consideramos que el tratamiento de la función logarítmica en los libros de texto, no soluciona esta problemática, es decir, no zanja la brecha entre el aspecto aritmético con que se la presenta, desde el inicio de su enseñanza, y su uso como función. Se la presenta como una herramienta para facilitar cálculos, inmersa en un enfoque absolutamente aritmético, que en la actualidad, con el uso de las calculadoras en el aula y el tipo de ejercicios que se proponen, pareciera carecer de sentido, haber perdido la razón de ser que le hiciera ver

la luz en pleno siglo XVII. Al ser retomado su estudio en materias más avanzadas dentro de la estructura curricular del sistema superior, pierde su carácter instrumental para convertirse en un objeto de estudio en sí mismo. Su presentación como inversa de la función exponencial, a su vez, opaca su autonomía funcional y la introducción de la definición formal como primitiva de la hipérbola equilátera la aleja de ser pensada como una herramienta útil a la hora de, por ejemplo, modelar es decir, hallar un expresión que describa fenómenos de crecimiento en una representación gráfica a escala logarítmica.
Vemos entonces que, la etapa en su desarrollo, que denomináramos logaritmos como modelizadores y en la cual se cultivaran tantas representaciones y significados de los mismos, no se explota en la escuela prevaleciendo en ella una presentación axiomática de estos conceptos. La forma de tratar a las funciones logaritmo y exponencial que se baraja en el aula de nuestros días, halla su sustento en la etapa de los logaritmos como objetos teóricos, en la cual se la ha escindido completamente de sus orígenes.
La evolución de este concepto hacia el que conocemos actualmente estuvo plagado de controversias y consensos, el enfoque y los conceptos que se priorizan en cada momento, respondiendo al paradigma imperante, se hacen notorios en el análisis de los libros de texto a los que presentamos someramente (ver tabla).

Por otra parte, al leer los libros escogidos, intentando que los mismos fueran representativos de cada época abordada, surge como evidente la influencia de las corrientes de pensamiento en cada uno de ellos. La comunicación de saberes responde pues, al paradigma imperante. De este modo, las nociones, pese a su despersonalización, atemporalidad y descontextualización a las que son sometidas para adquirir el status de socialmente admitidas, se ven teñidas de idiosincrasias e ideologías. Su puesta en textos de saber las distancia de los avatares de su gestación. En la bibliografía actual, nos encontramos con malas copias de libros interesantes que hicieron escuela, tal como los Elementos de Álgebra (1840) de Euler cuyo discurso se reproduce y llega hasta nuestros días, o el de Cauchy (1823), cuya rigurosidad aun influye en nuestra formación.

ÉPOCA	AUTOR	CONCEPTO	ENFOQUE
Primera Mitad del siglo XVII	Napier	Tablas de logaritmos	Numérico
Segunda Mitad del siglo XVII	L´Hospital	Subtangente constante Áreas iguales bajo una hipérbola	Geométrico
Primera Mitad del siglo XVIII	Agnesi	Falla del modelo para la cuadratura de funciones potencia Progresiones aritméticas y geométricas. Subtangente Constante.	Geométrico Inicio de analítico
Segunda Mitad del siglo XVIII	Euler	Estatus de función. Función inversa. Desarrollo en series	Analítico.
Primera Mitad del siglo XIX	Vallejo	Primitiva de $\frac{dx}{x}$ Desarrollo en serie	Analítico
Segunda Mitad del siglo XIX	Lacroix	Primitiva de $\frac{dx}{x}$ Desarrollo en serie. Construir la gráfica desde la tabla.	Analítico
Primera Mitad del siglo XX	Baldor Res & Sparks	Exponente al que se debe elevar una base. Mantisa y característica Interpolación	Aritmético
	Granville Spivak	Primitiva de $\frac{dx}{x}$ Función inversa. $f(x * y) = f(x) + f(y)$	Analítico Estructural
Segunda Mitad del siglo XX	Texto para Bachillerato	Exponente al que se debe elevar una base. Función inversa y comparación de comportamientos	Aritmético funcional intuitivo
	Purcell – Finney	Primitiva de $\frac{dx}{x}$ Exponencial es la función inversa de la logarítmica	Analítico
	Edward	Primitiva de $\frac{dx}{x}$ Logarítmica es la función inversa de la exponencial	Analítico

Discusión

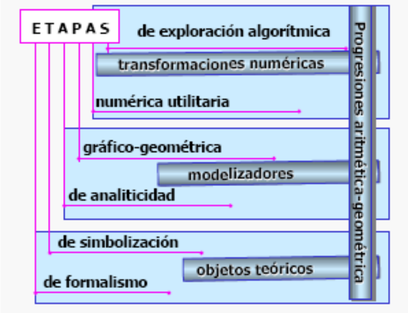
La intención de este trabajo ha sido profundizar en la problemática de la enseñanza del concepto de función y, en particular, en la función logaritmo desde una perspectiva encuadrada en el enfoque socio-epistemológico de la enseñanza de las matemáticas.

Considerar que éstas son un producto cultural, e interesarnos en mirar al individuo y a la sociedad haciendo matemáticas, construyéndolas, nos llevó a un rastreo de la noción logaritmo en el desarrollo de esta ciencia, incluso antes de que esta noción fuera formalmente definida en el siglo XVII. Nuestro propósito fue identificar hitos en su desarrollo, momentos relevantes, significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que pudieran proporcionar bases o elementos para un posterior diseño de una situación didáctica. También nos derivó hacia una exploración de las currícula de escuelas del nivel medio, medio superior y superior así como de los libros más utilizados en las mismas para determinar qué elementos se proponen para acercar a los alumnos a la función logaritmo y cuales están ausentes del discurso matemático de nuestros días.

Como estableciéramos desde nuestra introducción, la problemática que abordamos en esta tesis fue la “dislexia” entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar, que reportara Trujillo (1995), siendo nuestro interés sentar las bases para el diseño de una situación didáctica que dote de significado a la función logaritmo en el ámbito escolar. Consideramos necesario que este tipo de estudios aporte, entre otras cosas, conocimientos que clarifiquen el significado de los objetos matemáticos abordados, su evolución y las restricciones a las que hayan sido sometidos al pertenecer a un sistema didáctico pues nuestro fin último es impactar en el sistema educativo y para ello se requiere estudiar y comprender a profundidad uno de sus polos, el del saber que se pretende enseñar, cómo se lo está abordando y qué consecuencias se están produciendo, sin olvidar que se trata de una problemática compleja al ser una práctica humana.

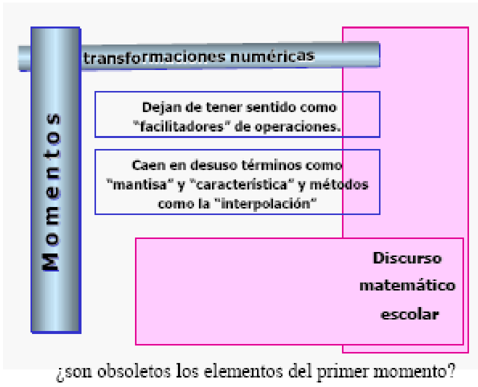
En el caso de los logaritmos, eje de este trabajo, consideramos que la transposición didáctica, a la que inevitablemente todo concepto es sometido antes de ser introducido al aula, ha destazado a los logaritmos, los ha convertido en objetos útiles que deben ser manipulados con soltura sin necesidad de dotarlos de significado. Como ya estableciéramos, toda transposición genera una nueva epistemología del concepto, y en el caso de los logaritmos, ésta comienza a producirse y reflejarse en los textos y en su tratamiento desde el siglo XVIII. Podemos considerar un antes y un después de Euler y una reformulación de los mismos con Cauchy tiempo después.

Efectivamente, en nuestra indagación epistemológica concluimos que se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de la noción de función logaritmo, en cada una de las cuales se responde a distintos cuestionamientos, se utilizan diferentes herramientas, se incorporan nuevos elementos. A su vez, al analizar estas etapas con un referente más global y desde una perspectiva más general, establecimos tres momentos relevantes en el devenir de los logaritmos en un objeto matemático validado social y culturalmente para ser incorporado en el discurso matemático escolar.



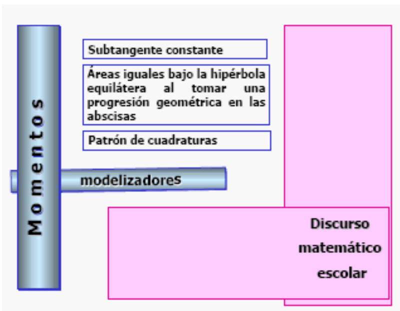
Concluimos entonces, que los objetos matemáticos aparecen en tanto se actúe sobre ellos, son una construcción sociocultural, por cuanto nacen al seno de una comunidad específica, respondiendo a cuestionamientos particulares pero que se van abstrayendo y escindiendo de sus orígenes para devenir en objetos universales, despersonalizados y atemporales. Las discusiones, las confrontaciones, la comunicación de los mismos hace que evolucionen, que adquieran status en una estructura teórica en tanto sean aceptados y exista un consenso. Los logaritmos, como toda producción humana, no está libre de estas consideraciones y creemos que este trabajo es una pequeña muestra de ello.

Resultados didácticos



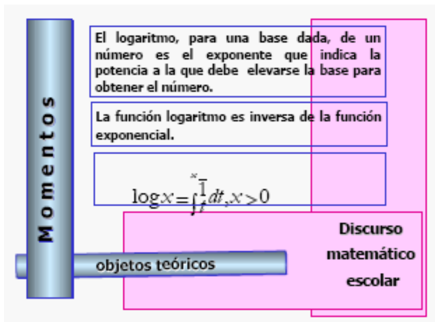
¿son obsoletos los elementos del primer momento?

Los libros de texto, en general, no rescatan argumentaciones geométricas respondiendo quizás a la pérdida de status de esta rama de la matemática en el discurso escolar. El argumento que prevalece en ellos es el de función inversa como relación entre las funciones exponencial y logarítmica lo cual inhibe el verlas como funciones por sí mismas, diluyendo un poco su autonomía funcional. La exacerbada utilización de ejercicios en los que se propone explorar sus dotes como facilitadores de operaciones, en su condición de transformación, y como la primitiva de una integral, que nos deriva implícitamente a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, refuerza el pensamiento algorítmico empobreciendo y fraccionando su significado matemático.



Ausencia de elementos propios del segundo momento

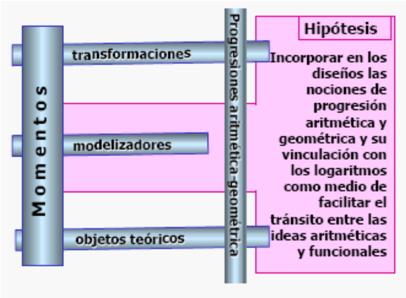
Consideramos entonces, que la "dislexia" en el aprendizaje de la noción logaritmo es producto de su enseñanza, de la priorización de una presentación axiomática y de una exacerbada algoritmización en los dos momentos en que aparece explícitamente en el discurso matemático escolar, esto es, en su primer acercamiento como potente herramienta facilitadora de operaciones en los últimos semestres de bachillerato; y en su reaparición, semestres después en la enseñanza superior, como una función definida como la primitiva de la hipérbola equilátera, siendo requisito para ello conocer el Teorema Fundamental del Cálculo. La ausencia en el discurso matemático escolar de elementos que funjan como nexos entre ambos momentos da pauta de la no construcción, en el ámbito escolar, de esta noción y por ende, de la absoluta falta de significados en torno a ella que los alumnos pueden adquirir.



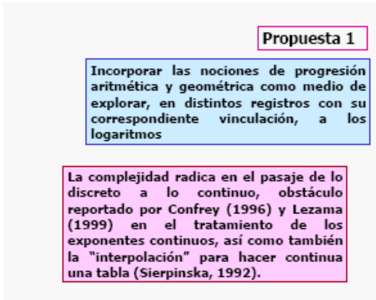
Predominio de elementos del tercer momento

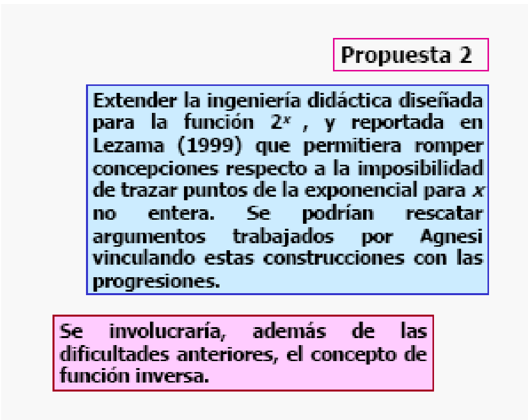
Esbozo de diseños a futuro

Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber nos lleva a proponer como hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento. Creemos que son elementos que



pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación. La complejidad de esta propuesta radica en el tránsito de lo discreto a lo continuo, es decir, en el tratamiento de los exponentes continuos, problemática abordada por Wallis en el siglo XVIII. A su vez, se deben tener presente las dificultades reportadas por Sierpinska (1992) respecto a la vinculación entre "sucesión" y "función" los cuales suelen generar confusiones así como también los procesos de interpolación utilizados para hacer continua una tabla.

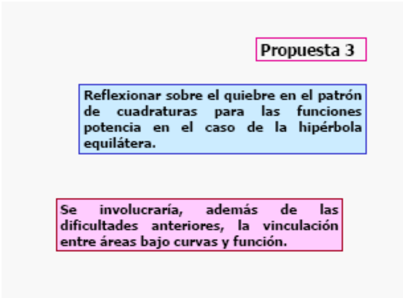




Consideramos que también resultaría interesante extender las ideas trabajadas en la ingeniería didáctica reportada en Lezama (1999) cuyo diseño gira en torno a la construcción geométrica de la función 2^x. En esta instancia se podrían rescatar conceptos trabajados ya en el siglo XVIII por Agnesi vinculando la construcción geométrica de estos segmentos con las progresiones aritmética y geométrica. Así mismo, podría pensarse como variable didáctica las limitaciones de las construcciones geométricas las que podrían utilizarse para obligar al pasaje del registro gráfico-geométrico al numérico, para regresar al gráfico y explorar la posibilidad de inducir el traslado al algebraico, pensando que la vinculación entre registros y el tránsito entre ellos la dota de mayor significado. Se involucraría aquí fuertemente la noción de "función inversa", lo cual requerirá de un tratamiento especial debido a la complejidad de tal noción, así como también cuidar que los logaritmos no sean tomados como subsidiarios de las exponenciales, como ciudadanos de segunda en el mundo matemático, sin una identidad propia.

Otro elemento interesante y también ausente en las clases de matemática es el quiebre en el patrón de cuadraturas para las funciones potencia Esta idea admite el trabajo en varios registros, y también tomaría como eje la relación entre las progresiones mencionadas.

Así, podríamos continuar reflexionando y proponiendo distintos elementos para incorporar a un diseño explotando a conciencia nuestros resultados del análisis preliminar. Sin embargo, desde nuestra perspectiva consideramos que son dos los elementos fundamentales a tener en cuenta a la hora de realizar el diseño: la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, por un lado; y el quiebre en el patrón de cuadraturas de las funciones potencia,



por otro. Cabe señalar que, una ingeniería didáctica se diseña bajo objetivos específicos que atienden a ciertas circunstancias dadas, las que determinan las variable didácticas a elegir. Por tanto sólo hemos esbozado algunas posibles rutas a seguir con el ánimo de mostrar cómo utilizaríamos nuestros resultados en un posterior diseño. Queda entonces la tarea o quizás el desafío de realizar el diseño y su puesta en escena para continuar con las fases de la ingeniería didáctica, que como metodología hemos implementado en este trabajo, y para dar una respuesta científica a esta problemática que aporte elementos robustos al discurso matemático escolar de nuestros días.

Bibliografía

Acevedo, E. et al. (1979). La literatura a través de los tiempos (2 Tomos). Barcelona, España: Montaner & Simón.

Agnesi, M. (1748). Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale (2 tomos).

Aguilar, P., Farfán R. M., Lezama, J., Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Rosa Ma. Farfán (Ed.), Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 19-23), Morelia, Michoacán, México.

Alanís, J. A. (1996). La Predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN, México.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayoub, R. (1993, abril). Whats is a Napierian Logarithm? The American Mathematical Montlhy 100(4), 351-364.

Bachelard, G. (1997). La formación del espíritu científico Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. (J. Babini, Trad.) (21ª ed.). México: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1938).

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume: deux registres des interations didactiques. En C. Laborde (Ed.), Actes du premier colloque franco-allemand de didactique de mathémetique et de l'informatique (pp. 15-26). Francia: La Pensée Sauvage.

Baldor, A. (1967). Álgebra elemental. México: Editorial Cultura mexicana, S. A.

Barnett, R. (1987). Álgebra y trigonometría. (Segunda edición en español). México: Mc Graw Hill.

Bernal, J. (1979). La ciencia en la historia. México: Universidad Autónoma de México, Nueva Imagen.

Brian, J. & Chevalier, M. C. (1996). Les enjeux didactiques dans l'enseignement des Mathématiques. Paris: Hatier. Citado en Ruiz Higueras, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza aprendizaje. Apuntes no publicados.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathemátiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques 9(3), 309-336.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra & I. Saiz (Eds.), Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexión. Cap. IV, 65-94. Ed. Paidós Educador.

Brugrov, Y. S.& Nikolski, S. M. (1984). Cálculo diferencial e integral. Moscú, URSS: Editorial Mir.

Cajori, F. (1924). A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching. (Copyright, 1896 y 1917). New York, EE. UU.: The Macmillan company. Edición revisada y ampliada.

Camacho, A. (2000). Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN, México.

Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales" 42, 353-369.

Cantoral, R. (1990). Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico". Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. (1994). Transposición didáctica y situaciones didácticas. Versión preliminar para el seminario de investigación en ingeniería didáctica Otoño 1994. México.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la serie de Taylor. Mathesis 11, 55-101.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Hitt, F. & Rigo, M. (1983). Historia de los conceptos de logaritmo y exponencial. México: Cinvestav–IPN, Sección de Matemática Educativa.

Carlson, M. P. (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. Issues in Mathematics Education 7, 114-162.

Carretero, M. (1993). Constructivismo y educación. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Castañeda, A. (2000). Estudio didáctico del punto de inflexión: Una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cauchy, A. L. (1994). Curso de Análisis (C. Álvarez, Trad.). México: Mathema. (Trabajo original publicado en 1823).

Confrey, J. (1996). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. Journal for Research in mathematics education 26(1), 66-86.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La creación de los exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Eduativa 3(1), 5-31.

Cordero, F. (1999). La Matemática Educativa en una aproximación sociocultural a la mente. Memorias del VII Simposio Internacional de Educación Matemática (pp. 106-112). UPN. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1995). La Transposición didáctica. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. México: Editorial SEP.

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Didactique outil-objeto. Recherches en Didactique de Mathematique 7(2), 5-31.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collége-Seconde. (P. Ferreiras-Soto, Trad.). En: Enseñanza de las matemáticas: relaciones entre saberes, programas y prácticas (pp. 241-256). Francia: Topiques éditions. Publicaciones de IREM.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, Smoothness and periodicity. Focus on learning problems in mathematics 5(3-4). 119-132.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1987). On the deep structure of functions. Proceeding of the eleventh international conference for the psychology of mathematics education (pp. 190-196). Montreal: Université de Quebec, Montreal. Citado por Tall 1992.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflexive abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), Epistemological foundations of mathematical experience (pp. 159-202). New York, EE. UU.: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación matemática 8(3), 24-41.

Dubinsky, E. (1998). Una década de investigación en educación matemática sobre algunos temas de matemáticas avanzadas. En F. Cordero (Ed.), Serie: Antologías. Número 3. México: Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Relime 3(1), 47-70.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (M. Vega, Trad.). "Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels (1995). Colombia: Cali, Restrepo, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
Edwards, C. H. (1979). The Historical Development of the Calculus. New York, NY, EE. UU.: Springer-Verlang.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). New York: EE. UU.: Kluwer Academic Publishers.

Euler, L. (1835). Introduction a l´analyse infinitésimale. París, Francia: L'Ecole Polytechnique. (Trabajo original publicado en 1748).

Euler, L. (1984). Elements of Algebra. (John Hewlett , Trad.). EEUU: Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1770, Vollständige Anleitung zur Algebra).

Farfán R. M. (1997). Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. (1993). Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. M. (1995). Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.), Serie de Antologías 2 (pp. 55-119). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Farfán, R. M. (1992). ¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe. En R. Cantoral, R. M. Farfán & C. Imaz (Eds.), Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa (pp. 236-253). México. Vol 2, Sección de Plenarias.

Ferrari, M. (2001). Un acercamiento socioepistemológico. Estudio de la función logaritmo. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Finney, R. & Thomas, G. (1980). Calculus and analytical geometry. EE. U.: Reading, Ma: Addison Wesley.

Gaarder, J. (1998). El mundo de Sofía. México: Patria-Siruela.

Garza Olvera, B. (1990) Aritmética y álgebra. (Primera edición). México: D.G.E.T.I, S.E.P., S.E.I.T.

Garza Olvera, B. (1990). Cálculo diferencial (Primera edición). México: D.G.E.T.I, S.E.P., S.E.I.T.

Granville, W. A. (1990). Cálculo diferencial (Decimotercera edición). México: Limusa.

Gridgeman, N. T. (1973). John Napier and the history of logarithms. A. Gelbart (Ed.), Scripta Mathematica. A Quartely Journal. New York. EE.UU.: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University.

Hogben, L. (1956). La matemática en la vida del hombre. México: Continental. Citado en Trujillo (1995).

Huygens, C. (1690). Discours de la cause de la pesanteur. Reeditado por IREM de Dijon (abril-1981)
Etchegoyen, S., Fagale, E., Rodríguez, S., Avila, M. & Alonso, M. (2000). Matemática 1. Buenos Aires, Argentina: Kapeluz.

Kudriávtsev, L. D. (1983). Curso de análisis matemático. Moscú, URSS: Editorial Mir.

Kuhn, T. (1986). La estructura de las revoluciones científicas (Séptima Reimpresión). México: Fondo de Cultura Económica.

L´Hospital, G. (1998). Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas (R. Cambray, Trad.). México: Mathema. (Trabajo original publicado en 1696).

Lacroix, S. F. (1837). Traité élémentaire de calcul differential et de calcul integral. París, Francia: Bachelier: Imprimeur-Libraire.

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), La démonstration mathématique dans l´Histoire. (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Lovaglia, F. (1972). Álgebra: an intermediate approach. (Primera edición en español). New York, EE. UU.: Harla & Row.

Mahoney, M. S. (1973). The Mathematical Career of Pierre de Fermat. 1601-1665.

Margolinas, C. (1993). De l'importance du vrai et du faux. Dans la classe de mathemátiques. París, Francia: La Pensée sauvage, Editions.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Melchor Ceballos, T. (1996). El concepto de función y su relación con la proporción. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mirón, H. & Cantoral, R. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada.: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. Relime 3(3), 265- 292
Napier, J. (1614). A description of the admirable table of logarithms. London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright.

Naux, Ch. (1966-1971). Histoire des Logarithmes. De Neper a Euler. (Tomo I y II). París, Francia: Librairie Scientifique et Technique.

Newton, I. (1968). Further logarithmic calculation. En D. Whiteside (Ed.), The mathematical papers of Isaac Newton Vol 2. Cambridge, Gran Bretaña: University Press. (Trabajo original publicado en 1667).
Newton, I. (1693). Principios matemáticos. (A. Escohotado & M. Saenz, Trad.). Barcelona, España: Altaya. (Trabajo original publicado en 1686)

Ocampo, J. (1992). La dimensión gráfica de los conceptos de límite y derivadas: experiencia con profesores de matemáticas: Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in Mathematics Education: A critical review of recent research. Mathematics Education Research Journal 8(1), 58-90.

Phillips, H. (1945). Cálculo infinitesimal. México: unión tipográfica hispanoamericana.
Purcell, E., Varberg, D. (1987). Cálculo con Geometría Analítica (Cuarta edición). México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Quiróz, M. (1989). Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios. Un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del Precálculo. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Rees, P. & Spark, F. (1991). Álgebra (Amores, Trad.). (Décima edición). México: Mc. Graw Hill. (Trabajo original publicado en 1939).

Rei, D. (1978). La revolución científica: Ciencia y sociedad en Europa entre los siglos XV y XVII. Barcelona, España: ICARIA.

Rivera, A. (1996). Acerca de la relación entre el saber y los efectos de la tecnología. Una investigación con profesores sobre sus actitudes y creencias. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN, México.

Ruiz Higueras, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya, Jaén, España.

Ruiz Higueras, L. (2000). Ingeniería Didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza–aprendizaje. Apuntes no publicados del curso dictado en Relme XIV. Pananá.

Saldaña, R. (1988). Del área a la integral: de la noción al concepto y de ahí a su definición (Ensayo histórico). Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. Revue Française de Pédagogie. Didactique des sciences économiques et sociales 112, 85-118.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Simmons, H. A. (1948). College Algebra. New York, EE. UU.: The Macmillan Company.

Soto, E. M. (1988). Una experiencia de redescubrimiento en el aula: Acerca de los logaritmos de los números negativos y los orígenes de la variable compleja. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Spivak, M. (1992). Calculus. (Segunda edición). Barcelona, España: Reverté.

Stewart, J. (1994). Cálculo. México: Grupo Editorial Hiberoamérica.

Stewart, J. (1999). Cálculo. Conceptos y contextos. México: Itenational Thomson Editores

Swokowski, E. W. (1989). Cálculo con Geometría Analítica (Segunda Edición). México: Marquette University.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) citado en Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). New York: EE. UU.: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). New York, EE. UU.: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematics teaching and learning. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 495-511). New York: EE. UU.: Macmillan Publishing Company.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Vallejo, M. (1849). Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas. (2° Tomo). París, Francia: Librería Rosa, Bouret y C^{ia}. Imprenta de J. Clave.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp.195-213). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Youschkevitech, (1995). The concept of function up to the midde of the 19th century. (R. Farfán, trad.). En R. M. Farfán (Ed.), Antologías 1 (pp. 81-185). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México. (Reimpreso del Arch. Hist. Exact. Sci. 16, pp. 37-85, 1976).